TRẦN ĐỨC HUYÊN

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

TOÁN

10

GHN
6
[
62

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC HUYÊN
Thạc sĩ Toán học – GV Trường chuyên Lê Hồng Phong

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
TOÁN
LỚP 10

*(Tài liệu bổ trợ dành cho GV &
HS Ban A – Ban Khoa học Tự nhiên)*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Kiểm tra bằng phương pháp trắc nghiệm là một phương pháp kiểm tra tích cực và khách quan. Theo thông tin từ Bộ Giáo dục & Đào tạo thì Việt Nam có khả năng sẽ tổ chức thi thí điểm theo phương pháp trắc nghiệm từ bậc trung học phổ thông, sau đó mới thực hiện ở bậc đại học. Sách giáo khoa đổi mới giáo dục theo hướng chuyên ban mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã có phần câu hỏi trắc nghiệm sau mỗi chương.

Để giúp các bạn học sinh làm quen với các dạng câu hỏi trắc nghiệm của các phân môn toán học theo các khối lớp, chúng tôi biên soạn tập tài liệu :

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TOÁN LỚP 10 (BAN A)

Sách gồm nhiều chủ đề cơ bản trong chương trình toán lớp 10, mỗi chủ đề gồm 4 phần :

Tóm tắt lí thuyết.

Đề toán có giải.

Đề toán trắc nghiệm.

Đáp án trắc nghiệm.

Các bạn học sinh nên đọc và làm kĩ lưỡng phần lí thuyết và đề toán có giải trước khi đi vào làm phần đề toán trắc nghiệm và sau đó kiểm tra kết quả ở phần đáp án.

Chúc bạn thành công.

Trần Đức Huyên

PHẦN I – HÌNH HỌC

Chương 1

VECTƠ

A. LÍ THUYẾT

§1. Khái niệm vectơ

1. Định nghĩa :

Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng.

Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có *gốc* A, *ngọn* B. Đường thẳng qua A và B là *giá* của $\overrightarrow{AB}$. Độ dài đoạn thẳng AB là *môđun* của $\overrightarrow{AB}$. Chiều đi từ gốc A đến ngọn B là *hướng* của $\overrightarrow{AB}$.

2. Vectơ cùng phương :

- Hai vectơ cùng phương là hai vectơ có giá song song hay trùng nhau.
- Hay vectơ cùng phương có thể cùng hướng hay ngược hướng.
- Nếu giá của $\overrightarrow{AB}$ song song hay trùng với đường thẳng d, ta nói $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với d hay *phương của* $\overrightarrow{AB}$ *là đường thẳng d.*

3. Vectơ bằng nhau :

a) Định nghĩa :

Hai vectơ bằng nhau là hai vectơ cùng phương, cùng hướng và có môđun bằng nhau.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ bằng nhau, ta viết : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b) Tính chất :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

4. Vectơ đối nhau :

a) Định nghĩa :

Hai vectơ đối nhau là hai vectơ cùng phương, ngược hướng và có môđun bằng nhau.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau, ta viết :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$$

* Với 2 điểm phân biệt M và N, ta có : $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$

* Nếu I là trung điểm đoạn AB, ta có : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

b) Tính chất :

1) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AB} = -(-\overrightarrow{AB})$

5. Vectơ tự do :

a) Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{v}$ thỏa các điều kiện sau :

1) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$

2) Gốc của $\overrightarrow{v}$ là điểm bất kì trong mặt phẳng.

Ta gọi $\overrightarrow{v}$ là *vectơ tự do có đại diện* $\overrightarrow{AB}$

Bây giờ, $\overrightarrow{AB}$ gọi là vectơ buộc.

b) Giả sử $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ là hai vectơ tự do lần lượt có đại diện $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Ta có :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$$

6. Vectơ $\overrightarrow{0}$:

a) Vectơ $\overrightarrow{0}$ là vectơ có gốc và ngọn trùng nhau.

Như vậy : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad AM \equiv M$

b) Vectơ $\overrightarrow{0}$ có môđun bằng không và có phương bất kì.

7. Xác định điểm bằng đẳng thức vectơ :

Cho điểm O cố định và vectơ $\overrightarrow{v}$ không đổi. Tồn tại duy nhất điểm M sao cho :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}} \qquad (1)$$

Ta nói : Điểm M được xác định bởi đẳng thức (1).

§2. *Phép cộng, phép trừ vectơ*

1. Phép cộng 2 vectơ tự do :

a) Bài toán mở đầu :

Cho 2 vectơ tự do $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Gọi $\overrightarrow{c}$ là vectơ tự do có đại diện $\overrightarrow{OB}$.

Chứng minh rằng vectơ $\overrightarrow{c}$ không phụ thuộc cách chọn điểm O.

b) Định nghĩa :

Vectơ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB}$ gọi là tổng của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu : $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

c) Tính chất :

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (tính giao hoán)

2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ (tính kết hợp)

3) $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$

4) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$

d) Quy tắc 3 điểm :

Cho 3 điểm bất kì M, N, P. Theo định nghĩa phép cộng 2 vectơ, ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}}$$

Đây là quy tắc 3 điểm của phép cộng vectơ.

e) Quy tắc hình bình hành :

Cho 2 vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Vẽ hình bình hành OACB vì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$

nên ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}}$$

Đây là quy tắc hình bình hành của phép cộng vectơ.

3. Phép trừ vectơ :

a) Định nghĩa :

Cho hai vectơ tự do $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Hiệu của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, được định nghĩa bởi :

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

b) Tính chất :

1) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}$

2) $\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

3) $\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

c) Quy tắc 3 điểm : *(dạng 2)*

Với 3 điểm M, N, P bất kì, ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}}$$

§3. Phép nhân một số với vectơ

1. Định nghĩa :

Định nghĩa 1 :

Cho vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ và số thực $k \neq 0$. Kí hiệu $k\overrightarrow{a}$ chỉ một vectơ cùng phương với $\overrightarrow{a}$ và :

$$* \left[\begin{array}{l} \text{cùng hướng với } \overrightarrow{a}\text{, nếu } k > 0 \\ \text{ngược hướng với } \overrightarrow{a} \text{ nếu } k < 0 \end{array}\right.$$

* Có môđun $|k\overrightarrow{a}| = |k|.|\overrightarrow{a}|$

Định nghĩa 2 :

$$k\overrightarrow{0} = 0.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$$

2. Tính chất :

Cho 2 vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ với mọi số thực k, m ta có :

1) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$ (tính phân bố)

2) $(k + m)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}$ (tính phân bố)

3) $k(m\overrightarrow{a}) = (km)\overrightarrow{a}$ (tính kết hợp)

4) $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Hệ quả :

a) $k(-\overrightarrow{a}) = -k\overrightarrow{a}$

b) $k(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$

3. Quan hệ giữa hai vectơ cùng phương :

Theo định nghĩa phép nhân một số với một vectơ, nếu $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$ thì $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương. Đảo lại, ta có định lí sau :

Định lí 1 :

Cho 2 vectơ cùng phương $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.

Tồn tại duy nhất số thực k sao cho : $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$

Hệ quả :

Cho $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương và $|\overrightarrow{b}| = m|\overrightarrow{a}|$, $m > 0$

Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng thì $\overrightarrow{b} = m\overrightarrow{a}$

Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ngược hướng thì $\overrightarrow{b} = -m\overrightarrow{a}$

4. Xác định điểm I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

Định lí 2 :

Cho 2 điểm A, B và 2 số thực α, β với $\alpha + \beta \neq 0$.

Tồn tại duy nhất điểm I sao cho :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}}$$

Có thể xác định điểm I bằng đẳng thức :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{BI} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$$

Hệ quả 1 :

Với mọi điểm M trong mặt phẳng, ta có :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}}$$

Đây là công thức rút gọn tổng 2 vectơ.

Hệ quả 2 :

Giả sử ta có $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ với $\alpha + \beta \neq 0$.

Nếu OM cắt AB tại I thì : $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OM} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OI} \end{cases}$

5. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương :

Định lí 3 :

Cho 2 vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương. Với mọi vectơ $\overrightarrow{v}$, tồn tại duy nhất cặp số thực (m, n) sao cho :

$$\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$$

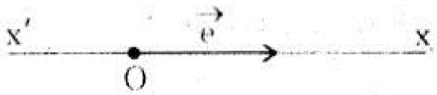
Nói cách khác, nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương, ta có kết quả sau :

$$\boxed{m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = \alpha \\ n = \beta \end{cases}}$$

§4. Tích vô hướng

I. Tọa độ của vectơ trên trục :

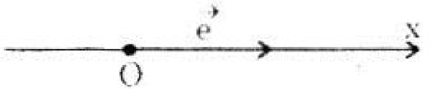
1. Trục tọa độ là một đường thẳng trên đó có chọn một điểm O cố định làm gốc và vectơ đơn vị $\overrightarrow{e}$. Hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{e}$ là hướng của trục.

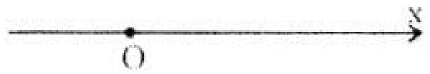


$|\overrightarrow{e}| = 1$

Giả sử có trục là đường thẳng x'Ox với tia Ox cùng hướng với $\overrightarrow{e}$. Ta kí hiệu trục này là $\overrightarrow{Ox}$. Để đơn giản, có khi ta không vẽ vectơ $\overrightarrow{e}$

trên trục





2. Tọa độ của vectơ trên trục :

a) Định nghĩa :

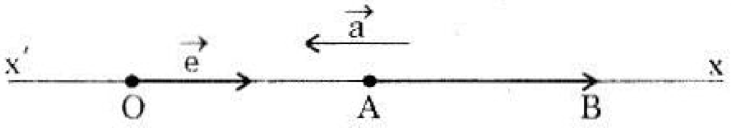
Cho vectơ $\vec{a}$ cùng phương với $\overrightarrow{Ox}$, nghĩa là cùng phương với $\vec{e}$. Tồn tại duy nhất số thực t sao cho :

$$\boxed{\vec{a} = t\,\vec{e}}$$

Số t gọi là *tọa độ* của $\vec{a}$ hay *số đo đại số* của $\vec{a}$ trên $\overrightarrow{Ox}$.

Ta biết rằng t là số thực có trị tuyệt đối bằng $|\vec{a}|$ và

$$\begin{cases} t > 0 \text{ nếu } \vec{a} \text{ cùng hướng với trục} \\ t < 0 \text{ nếu } \vec{a} \text{ ngược hướng với trục} \end{cases}$$



Cho $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với trục. Số đo đại số của $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu $\overline{AB}$.

Như vậy : $$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,.\,\vec{e}}$$

b) Định lí 4 :

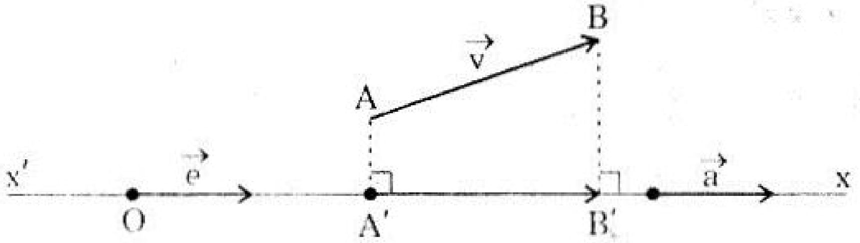
Với 3 điểm A, B, C bất kì trên $\overrightarrow{Ox}$, ta có :

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}} \quad \text{(hệ thức Sa-lơ)}$$

3. Chiếu của vectơ trên trục :

a) Định nghĩa :

Cho vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên $\overrightarrow{Ox}$.



Số đo đại số $\overline{A'B'}$ gọi là *chiếu của* $\vec{v}$ *lên* $\overrightarrow{Ox}$, kí hiệu :

$$\overline{A'B'} = \text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{v}$$

hay

$$\boxed{\overline{A'B'} = \text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{v}}$$

Nếu $\vec{a}$ là một vectơ cùng hướng với $\vec{e}$, ta còn viết :

$$\boxed{\overline{A'B'} = \text{ch}_{\vec{a}}\,\vec{v}}$$

b) Định lí 5 :

Cho 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực t. Ta có :

$$\text{ch}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{b}$$

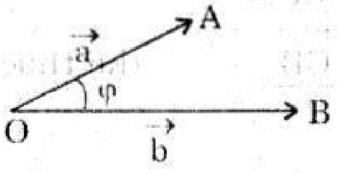
$$\text{ch}_{\vec{e}}(t\,\vec{a}) = t.\,\text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{a}$$

4. Góc của 2 vectơ – Công thức chiếu của vectơ :

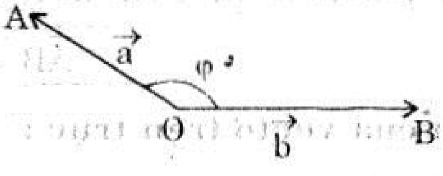
a) Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc $\varphi = \widehat{AOB}$ là góc của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu : $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi)$



φ nhọn



φ tù

b) Công thức chiếu của vectơ :

Định lí 6 :

Gọi φ là góc giữa vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ và trục $\overrightarrow{Ox}$. Ta có :

$$\text{ch}_{\vec{e}}\,\vec{v} = |\vec{v}|.\cos\varphi \quad \text{hay} \quad \boxed{\overline{A'B'} = AB.\cos\varphi}$$

II. Tích vô hướng của 2 vectơ :

1. Định nghĩa :

Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, được định nghĩa bởi :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,,\,\vec{b}})$$

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = OA\,.\,OB\,.\cos\widehat{AOB}}$$

2. Tích vô hướng của 2 vectơ cùng phương :

a) Cho 2 vectơ cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta có :

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow$ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng $\Rightarrow$ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$

b) Giả sử $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương với $\overrightarrow{Ox}$. Ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\,.\,\overline{CD}}$$

c) Trường hợp đặc biệt : $\vec{b} = \vec{a}$

Tích vô hướng $\vec{a}\,.\,\vec{a}$ được kí hiệu $\vec{a}^{\,2}$, gọi là *bình phương vô hướng* của $\vec{a}$. Theo định nghĩa, ta có :

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

hay $$\boxed{\overrightarrow{AB}^{\,2} = AB^2}$$

3. Dấu của tích vô hướng :

a) Đặt $\varphi = (\widehat{\vec{a}\,,\,\vec{b}})$. Ta có :

$0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi > 0 \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} > 0$

$\varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

$\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \Rightarrow \cos\varphi < 0 \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} < 0$

b) Điều kiện vuông góc :

Với $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$, ta có :

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0}$$

4. Công thức chiếu của tích vô hướng :

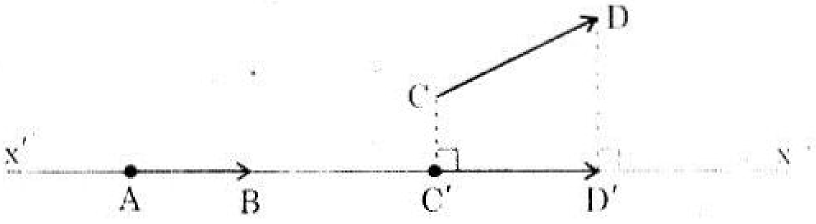
Từ định nghĩa và định lí 6, ta suy ra :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.\mathrm{ch}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|.\mathrm{ch}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

Cho $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu của C và D lên trục $\overrightarrow{Ox}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ta có :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'}}$$



Ghi chú :

Tích $\overline{AB}.\overline{C'D'}$ không phụ thuộc vào hướng của trục $\overrightarrow{Ox}$. Do đó, khi áp dụng công thức chiếu, ta không cần nói rõ hướng của $\overrightarrow{Ox}$.

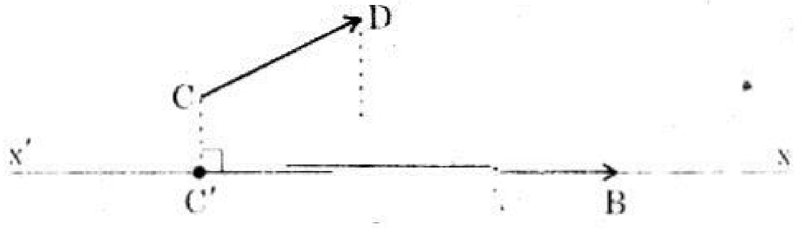
5. Tính chất của tích vô hướng :

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực t, ta có :

1) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$ (giao hoán)

2) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$ (phân bố)

3) $t(\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\,\vec{b})$ (kết hợp)



Ghi chú :

Có thể dùng tính phân bố để chứng minh công thức chiếu.

Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{D'D})$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

$$= \overline{AB}.\overline{C'D'}$$

6. Hằng đẳng thức về tích vô hướng :

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$$

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{b}|^2$$

7. Áp dụng của tích vô hướng :

Ta thường dùng tích vô hướng để :

- Chứng minh quan hệ vuông góc.
- Tính độ dài đoạn thẳng.

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Giải

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$ (quy tắc 3 điểm)

$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$ (tính giao hoán và kết hợp)

$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{0}$ (tính chất 3)

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (tính chất 4).

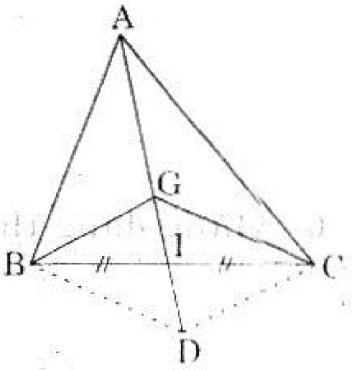
Bài 2

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Giải

Vẽ hình bình hành BGCD. Ta có :



$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$$

Do đó : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}$

Mặt khác, do tính chất của trọng tâm ta có G là trung điểm của AD.

Cho nên : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

Vậy : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Bài 3

Cho tam giác ABC, I là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh :

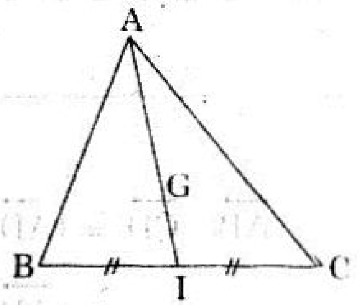
a) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (tính chất trung điểm).

b) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (tính chất trọng tâm).

Giải

a)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})\\ &= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$



b) Ta có : $\begin{cases} AG = \dfrac{2}{3}AI \\ \overrightarrow{AG} \text{ và } \overrightarrow{AI} \text{ cùng hướng} \end{cases}$

Do đó :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

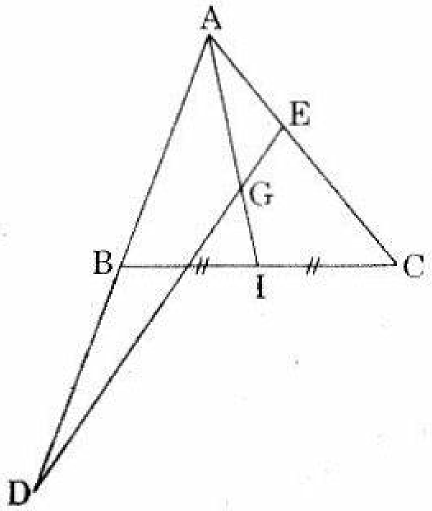
Bài 4

Cho tam giác ABC, trọng tâm là G. Gọi D và E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh 3 điểm D, G, E thẳng hàng.

Giải



a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}) \qquad (1)$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$

$= \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}) \quad (2)$

b) Từ (1) và (2), suy ra : $\overrightarrow{DG} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{DE}$

Vậy $\overrightarrow{DG}$ và $\overrightarrow{DE}$ cùng phương nên 3 điểm D, G, E thẳng hàng.

Bài 5

Cho tam giác ABC.

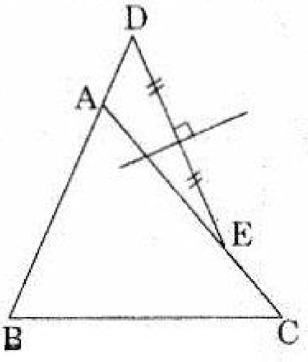
a) Xác định các điểm D và E thỏa các đẳng thức :

$$4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa hệ thức :

$$|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}|.$$

Giải



a) $4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{DA} - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad (1)$

Vậy điểm D được xác định bởi (1)

$$\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + 2(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Vậy điểm E được xác định bởi (2).

b) Áp dụng công thức rút gọn, ta có :

$$4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MD} \ ; \ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{ME}$$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{ME}|$

$$\Leftrightarrow MD = ME$$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn DE.

Bài 6

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, và M là trung điểm đoạn BD.

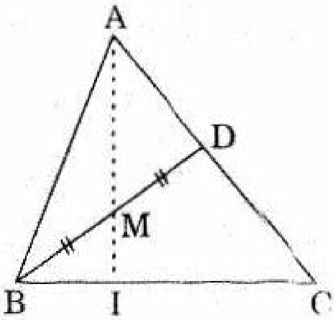
a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) AM cắt BC tại I. Tính $\frac{IB}{IC}$ và $\frac{AM}{AI}$.

Giải

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}.$$



b) AM cắt BC tại I thì :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\overrightarrow{AI} = \frac{7}{10}\overrightarrow{AI} \end{cases}$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{2}{5} \quad \text{và} \quad \frac{AM}{AI} = \frac{7}{10}.$$

Bài 7

Cho tam giác ABC. Gọi D và E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Gọi K là trung điểm của DE và M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$.

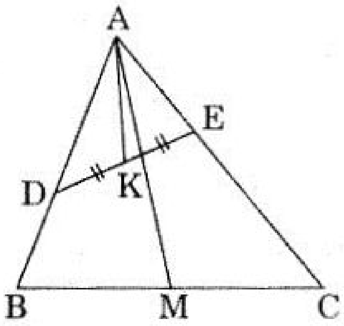
a) Tính $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{M}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (và x).

b) Tìm giá trị sao cho A, K, M thẳng hàng.

Giải

a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= (1 - x)\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

b) A, K, M thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AK}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \exists t : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AK}$

Do đó : $(1 - x)\overrightarrow{AB} + x.\overrightarrow{AC} = \frac{t}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{5}\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = \frac{t}{3} \\ x = \frac{t}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{15}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}$$

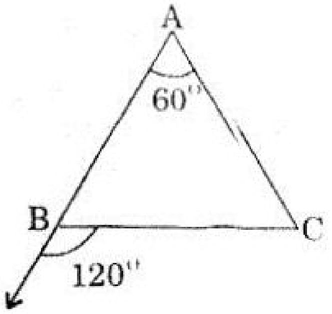
Vậy : $x = \frac{3}{8}$.

Bài 8

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Giải



a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$.

b) Ta có : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^0$

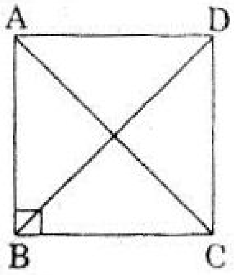
Do đó : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a.a.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2}$.

Bài 9

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

Giải



a) Ta có : $\mathrm{ch}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \overline{AB}$ nên :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AB} = a^2$

b) Ta có : $\mathrm{ch}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BD} = \overline{BA}$ nên :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overline{AB}.\overline{BA} = -a^2$.

Bài 10

Cho 3 điểm A, B, C. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

Giải

Ta có : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

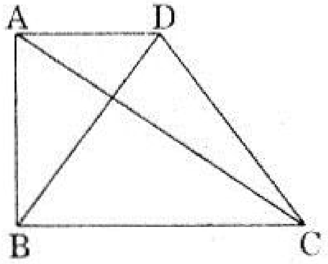
Ghi chú : Nên nhớ kết quả sau :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$$

Bài 11

Hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 3a, đáy AD = 2a, $BC = \frac{9}{2}a$. Chứng minh AC vuông góc với BD.

Giải



$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \ \text{(vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}) \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0 \ \text{(vì } \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA}) \end{cases}$

Do đó : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$

$= \overline{AB}.\overline{BA} + \overline{BC}.\overline{AD}$ (vectơ cùng phương)

$= -9a^2 + 9a^2 = 0$

Vậy AC vuông góc với BD.

Bài 12

Tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, CA = 6.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$, suy ra BM.

Giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(25 + 36 - 49) = 6$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}.6 = 4$

Ta còn có : $AM = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}.6 = 4$

Do đó : $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$

$= 25 + 16 - 2(4) = 33$

Vậy : $BM = \sqrt{33}$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. KHÁI NIỆM VECTƠ

1. Điều kiện nào trong các điều kiện sau là điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ đối nhau.

A. Hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ chung gốc và có hướng ngược nhau.

B. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ có độ dài bằng nhau, chung gốc và ngược hướng.

C. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng.

D. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ có cùng độ dài, cùng phương, cùng điểm cuối.

2. Cho hình bình hành ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$　　B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$.

3. Cho hình vuông ABCD, trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề đúng ?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$　　B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$　　D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

4. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

A. ABCD là hình bình hành

B. ABDC là hình bình hành

C. AD và BC có cùng trung điểm

D. AB = CD và AB // CD.

5. Cho tam giác ABC, có thể xác định bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

A. 3　　B. 6　　C. 4　　D. 9.

6. Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. Vô số.

7. Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và một điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

§2. PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ VECTƠ

1. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

A. IA = IB B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

2. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$.

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

3. Cho ba điểm ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. AB + BC = AC B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

4. Cho hình bình hành ABCD, có M là giao điểm của hai đường chéo. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$ D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

5. Cho bốn điểm ABCD. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

6. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100N$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 120^0. Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu ?

A. 100N B. $100\sqrt{3}N$ C. 200N D. $50\sqrt{3}N$.

7. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn điều kiện :

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. MABC là hình bình hành
B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$
D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

§3. NHÂN MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$
B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$
C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$
D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. Cho G là trọng tâm tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$
B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi k là số thỏa mãn : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{MN}$. Vậy k bằng bao nhiêu ?

A. 2
B. 3
C. $\frac{1}{2}$
D. -2.

4. Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thỏa mãn :

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1.$$

A. 0
B. 1
C. 2
D. Vô số.

5. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C'. Tìm x sao cho :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = x\overrightarrow{GG'}.$$

A. x = 0
B. $x = \frac{1}{3}$
C. x = 1
D. x = 3.

6. Cho hình vuông ABCD có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$.

§4. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$ B. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$

C. $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$ D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$.

2. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?

A. a^2 B. $\frac{1}{2}a^2$ C. $2a^2$ D. $a^2\sqrt{2}$.

3. Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (khác $\overrightarrow{0}$) thỏa mãn : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=-|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ B. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng

C. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ngược hướng D. $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}$.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A. AB = a, BC = 2a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. a^2 B. $-a^2$ C. $\frac{1}{2}a^2$ D. $a^2\sqrt{3}$.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tích vô hướng $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ bằng bao nhiêu ?

A. $a^2\sqrt{3}$ B. $3a^2$ C. a^2 D. $\frac{1}{2}a^2$.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$ B. a^2 C. $-a^2$ D. $-3a^2$.

8. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(1, 1) ; B(2, 4) ; C(10, –2). Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu ?

A. 90^0 B. 60^0 C. 45^0 D. 30^0.

9. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(1, 1) ; B(2, 4) ; C(10, –2). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. 30 B. 10 C. –10 D. –30.

10. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(1, 1) ; B(2, 4) ; C(10, –2). Xét tam giác ABC. Tính cosC ?

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ D. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Chương II

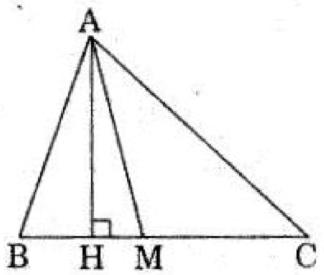
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

A. LÍ THUYẾT

§1. Hệ thức lượng trong tam giác

I. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Ta có :



1. Tam giác ABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \quad BC^2 = AB^2 + AC^2.$

2. Tam giác ABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \quad AM = \frac{1}{2}BC.$

3. Tam giác ABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \quad AB^2 = \overline{BH}.\overline{BC} \qquad \Leftrightarrow \quad AC^2 = \overline{CH}.\overline{CB}.$

Như vậy :

Nếu tam giác ABC vuông tại A thì ta có $AB^2 = BH.BC$ (1)

và $AC^2 = CH.CB$ (2)

Ngược lại, nếu tam giác ABC thỏa (1) hoặc thỏa (2) và H thuộc cạnh BC thì tam giác ABC vuông tại A.

4. Tam giác ABC vuông tại A $\Leftrightarrow \quad AH^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$

Như vậy :

Nếu tam giác ABC vuông tại A thì ta có $AH^2 = BH.HC$ (3)

Ngược lại, nếu tam giác ABC thỏa (3) và H thuộc cạnh BC thì tam giác ABC vuông tại A.

5. Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \quad AH.BC = AB.AC.$

6. Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$

7. Nếu tam giác ABC vuông tại A thì

$$AB = BC\sin C = BC\cos B = AC\operatorname{tg}C = AC\operatorname{cotg}B$$

$$AC = BC\sin B = BC\cos C = AB\operatorname{tg}B = AB\operatorname{cotg}C.$$

II. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho tam giác ABC.

Đặt : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

S là diện tích tam giác ABC.

R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến kẻ từ A, B, C.

h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C.

l_a, l_b, l_c là độ dài các phân giác trong kẻ từ A, B, C.

r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong góc A, B, C.

Ghi chú :

Từ đây trở đi, trong chương này, nếu cho tam giác ABC, ta quy ước sử dụng các kí hiệu trên nếu trong bài toán không đặt kí hiệu riêng.

1. Định lí hàm số côsin và hàm số sin

a) Định lí hàm số côsin

Cho tam giác ABC. Ta luôn có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

b) Định lí hàm số sin

Cho tam giác ABC. Ta luôn có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. Bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp

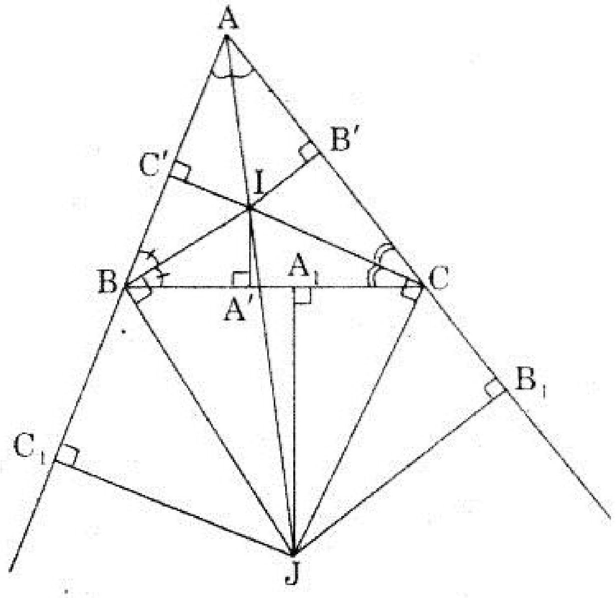
Đường tròn (I) tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại A', B', C'. Đường tròn (J) tâm J tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Ta có :

a) $AB' = AC' = p - a$

$BC' = BA' = p - b$

$CA' = CB' = p - c$

$AB_1 = AC_1 = p$



b) $r = (p - a)\,\text{tg}\,\frac{A}{2}$

$= (p - b)\,\text{tg}\,\frac{B}{2}$

$= (p - c)\,\text{tg}\,\frac{C}{2}$

c) $r_a = p\,\text{tg}\,\frac{A}{2}$

$r_b = p\,\text{tg}\,\frac{B}{2}$

$r_c = p\,\text{tg}\,\frac{C}{2}$

3. Diện tích

a) Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta có :

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

3) $S = \frac{abc}{4R}$

4) $S = pr$

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

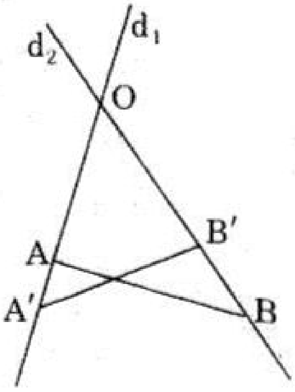
6) $S = p(p - a)\,\text{tg}\,\frac{A}{2} = p(p - b)\,\text{tg}\,\frac{B}{2} = p(p - c)\,\text{tg}\,\frac{C}{2}$

7) $S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

b) Tỉ số diện tích

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 lấy hai điểm tùy ý A, A', trên d_2 lấy hai điểm tùy ý B, B' (các điểm A, A', B, B' không trùng O). Ta có tỉ số diện tích giữa hai tam giác OA'B' và OAB là :

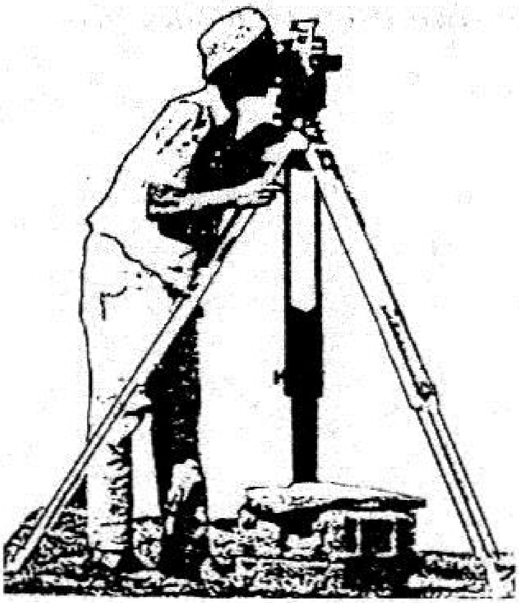
$$\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$$



§2. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác của tam giác đó.

Muốn giải tam giác ta cần tìm mối liên hệ giữa các yếu tố đã cho với các yếu tố chưa biết, cần tìm của tam giác thông qua các hệ thức đã được nêu trong định lí cosin, định lí sin và các công thức tính diện tích tam giác.



1. Định lí trung tuyến

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Ta có :

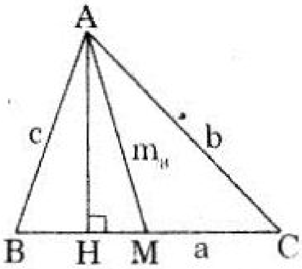
$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Như vậy ta có :

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

$$c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2$$



2. Định lí hiệu bình phương

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, AH là đường cao.

Ta có : $AB^2 - AC^2 = 2\,\overline{MH}\,.\,\overline{BC}$

Ghi chú :

Nếu điểm A thuộc đường thẳng BC, các hệ thức :

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$, $AB^2 - AC^2 = 2\,\overline{MH}\,.\,\overline{BC}$ vẫn đúng.

Như vậy, một tứ giác lồi là hình bình hành khi và chỉ khi tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo.

§3. Hệ thức lượng trong đường tròn

I. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

1. Hệ thức lượng trong đường tròn

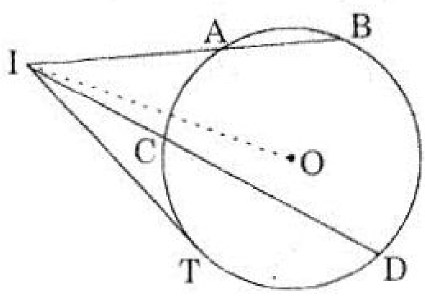
Định lí 1 : Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm I.

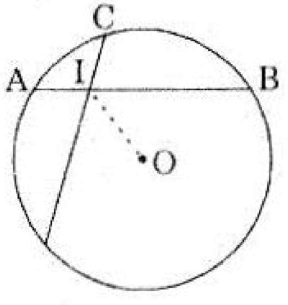
1) Nếu IAB và ICD là hai cát tuyến vẽ từ I tới đường tròn thì ta có :

$$\overline{IA}\,.\,\overline{IB} = \overline{IC}\,.\,\overline{ID} = IO^2 - R^2$$

2) Nếu IAB và IT lần lượt là cát tuyến và tiếp tuyến vẽ từ I tới đường tròn thì ta có :

$$IT^2 = \overline{IA}\,.\,\overline{IB}$$





2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

a) Định nghĩa :

Biểu thức $\overline{IA}.\overline{IB}$ hay $IO^2 - R^2$ gọi là *phương tích* của điểm I đối với đường tròn (O, R), kí hiệu $\mathscr{P}_{I/(O)}$

Như thế :
$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{I/(O)} &= \overline{IA}.\overline{IB}\\ &= d^2 - R^2 \quad (d = OI)\\ &= IT^2 \quad (\text{nếu I ở ngoài đường tròn (O)})\\ &= \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM'} \quad (\text{MM' là đường kính bất kì})\end{aligned}$$

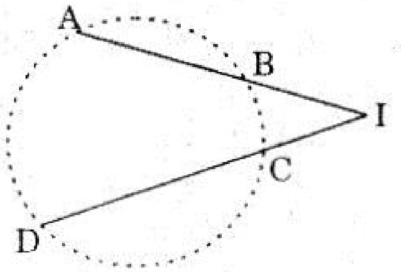
b) Tính chất :

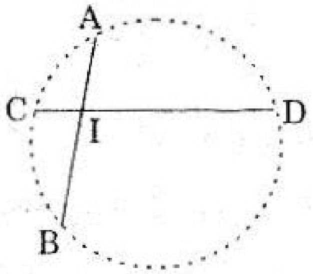
$\mathscr{P}_{I/(O)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ I ở ngoài đường tròn (O)

$\mathscr{P}_{I/(O)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ I ở trong đường tròn (O)

$\mathscr{P}_{I/(O)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ I thuộc đường tròn (O)

3. Điều kiện nội tiếp, điều kiện tiếp xúc





a) Điều kiện nội tiếp

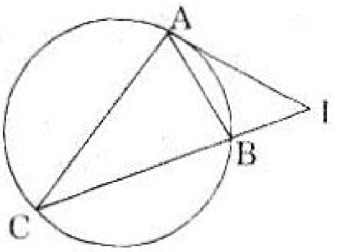
Định lí 2 :

Nếu hai đường thẳng phân biệt AB và CD cắt nhau tại I sao cho $\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IC}.\overline{ID}$ thì bốn điểm A, B, C và D cùng thuộc một đường tròn.

b) Điều kiện tiếp xúc

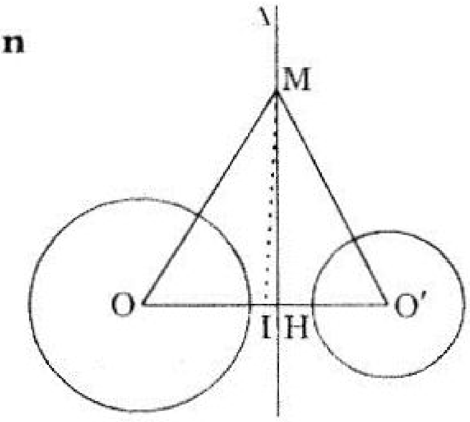
Định lí 3 :

Nếu I là điểm trên đường thẳng BC của tam giác ABC sao cho $IA^2 = \overline{IB}.\overline{IC}$ thì IA là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



II. Trục đẳng phương của hai đường tròn

1. Trục đẳng phương của hai đường tròn



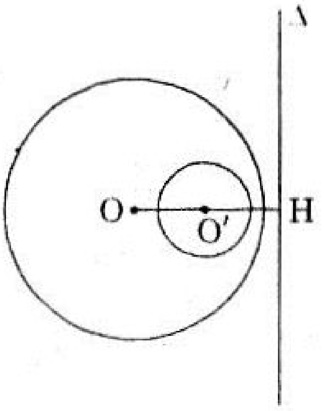
Định lí và định nghĩa :

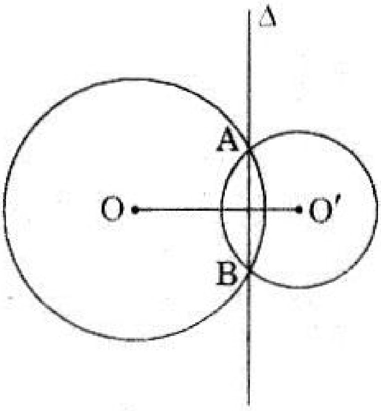
Tập hợp những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là đường thẳng vuông góc với đường nối tâm hai đường tròn. Đường này gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn.

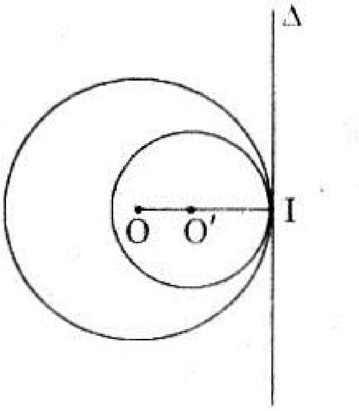
2. Tính chất của trục đẳng phương

a) Trục đẳng phương là đường thẳng vuông góc với đường nối tâm OO' tại điểm H định bởi :

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$$

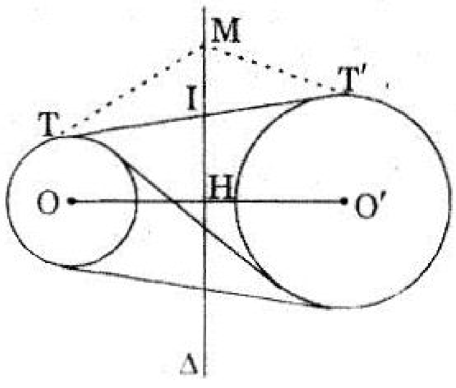


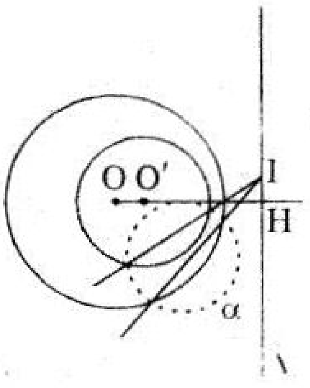




b) Nếu (O) và (O') cắt nhau tại A và B thì trục đẳng phương là đường thẳng AB.

c) Nếu (O) và (O') tiếp xúc nhau tại T thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung tại T.





d) Trục đẳng phương của hai đường tròn đi qua trung điểm các tiếp tuyến chung (trong và ngoài) của hai đường tròn.

Hơn nữa từ một điểm M ở trên trục đẳng phương của hai đường tròn và ở ngoài hai đường tròn ta có thể vẽ được *hai tiếp tuyến bằng nhau* tới hai đường tròn.

e) Để dựng trục đẳng phương của hai đường tròn *(ở trong nhau)*, ta theo cách dựng sau :

- Dựng đường tròn (α) bất kì cắt (O) tại M, N và cắt (O') tại M', N'.
- MN và M'N' cắt nhau tại I. Qua I dựng đường thẳng Δ vuông góc với đường nối tâm OO' : Δ chính là trục đẳng phương phải dựng.

f) Ba trục đẳng phương (không song song) của ba đường tròn lấy từng đôi một đồng quy tại một điểm. Điểm này có cùng phương tích đối với ba đường tròn, gọi là *tâm đẳng phương của ba đường tròn.*

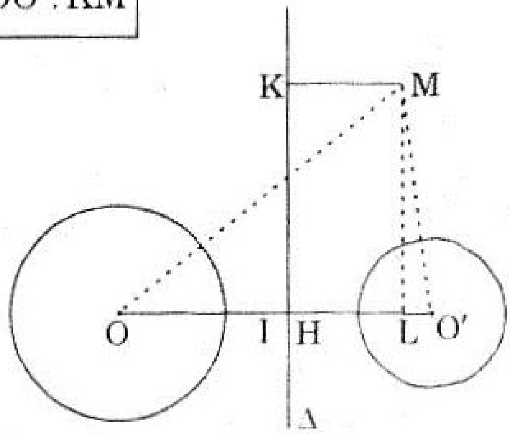
3. Định lí Casey (định lí về hiệu số phương tích đối với hai đường tròn)

Cho hai đường tròn (O, R) và (O, R') có trục đẳng phương Δ. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng và có hình chiếu lên Δ là K. Ta có :

$$\boxed{\mathscr{P}_{M/(O)} - \mathscr{P}_{M/(O')} = 2\overline{OO'}.\overline{KM}}$$

Đó là định lí về hiệu phương tích của điểm M đối với hai đường tròn (O) và (O') (định lí Casey).

Ta thường áp dụng định lí này để tính khoảng cách từ điểm M tới một đường thẳng nếu nó là trục đẳng phương của hai đường tròn nào đó.



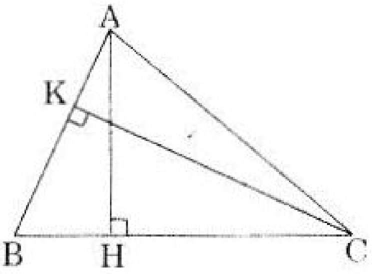
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Cho tam giác ABC có đường cao AH. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A nếu thỏa một trong các điều kiện sau :

1. AH.BC = AB.AC　　　　**2.** $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$.

Giải



Gọi CK là đường cao của tam giác ABC.

1. Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có :

$$2S = AH.BC = CK.AB$$

$$\Rightarrow AB.AC = CK.AB$$

$$\Rightarrow CK = CA$$

mà $CK \perp AB$ tại K $\Rightarrow$ $K \equiv A$ $\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

2. $\dfrac{AC}{BC} = \sin C \leq 1 \Rightarrow AC \leq BC \Rightarrow \widehat{B}$ nhọn

$\Rightarrow$ K thuộc tia BA và $K \neq B$.

tam giác vuông BKC cho $\sin B = \dfrac{CK}{BC} \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CK}{BC}$.

$\Rightarrow CK = CA$

mà $CK \perp AB$ tại K $\Rightarrow$ $K \equiv A$ $\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

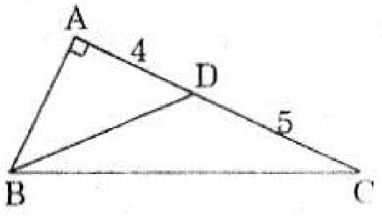
Bài 2

Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác trong. Tính các cạnh của tam giác ABC trong mỗi trường hợp.

1. $AD = 4, \quad DC = 5$ **2.** $AD = 1, \quad BD = \sqrt{10}$.

Giải

1. $AC = AD + DC = 9$

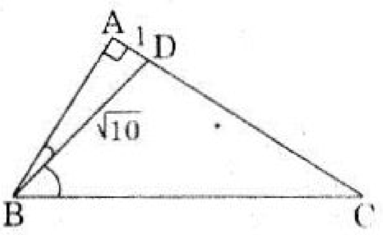


BD là phân giác trong của tam giác ABC

$$\Rightarrow \frac{BC^2}{25} = \frac{AB^2}{16} = \frac{BC^2 - AB^2}{25 - 16} = \frac{AC^2}{9} = 9$$

$$\Rightarrow BC = 15, \quad AB = 12$$

2. $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$.



Đặt $CD = x$ $(x > 0)$

BD là phân giác trong của tam giác ABC

$$\Rightarrow \frac{BC}{x} = \frac{AB}{AD} = 3 \Rightarrow BC = 3x$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2 = 9(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \quad AC = x + 1 = \frac{9}{4}, \qquad BC = 3x = \frac{15}{4}.$$

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 3a, AC = 4a, AH là đường cao. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho IA = 2IB, CI cắt AH tại E.

Tính CE.

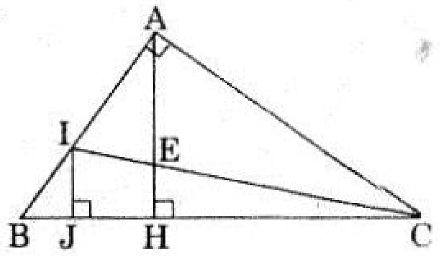
Giải

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên BC. Hai tam giác vuông CEH và CIJ đồng dạng cho :

$$\frac{CE}{CI} = \frac{CH}{CJ} \quad \Rightarrow \quad CE = \frac{CI.CH}{CJ}$$

Ta có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$$



$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5}a,$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9a}{5}$$

$$AB = 3a, \quad IA = 2IB \quad \Rightarrow \quad AI = 2a$$

$$CI = \sqrt{AC^2 + AI^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{5}$$

$$\frac{BJ}{BH} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad BJ = \frac{1}{3}BH = \frac{3a}{5}$$

$$CJ = BC - BJ = 5a - \frac{3a}{5} = \frac{22a}{5}$$

$$\text{Vậy :} \quad CE = \frac{2a\sqrt{5}\,.\,\frac{16a}{5}}{\frac{22a}{5}} = \frac{16a\sqrt{5}}{11}.$$

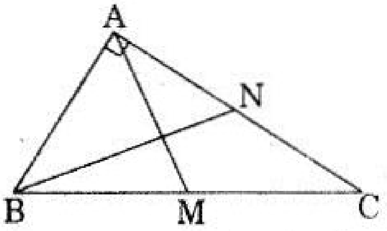
Bài 4

Cho tam giác ABC vuông tại A.

1. Giả sử tam giác ABC có hai đường trung tuyến AM = 2, BN = 3. Tính các cạnh BC, AB, AC.
2. Kéo dài BC một đoạn CD = AB. Giả sử AB = 1 và $\widehat{CAD} = 30^0$. Tính BC.

Giải

1. BC = 2AM = 4



Đặt x = AN = NC

Tam giác ABN cho : $AB^2 = BN^2 - AN^2$

$= 9 - x^2$

Tam giác ABC cho : $AB^2 = BC^2 - AC^2$

$= 16 - 4x^2$

$$\Rightarrow \quad 9 - x^2 = 16 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

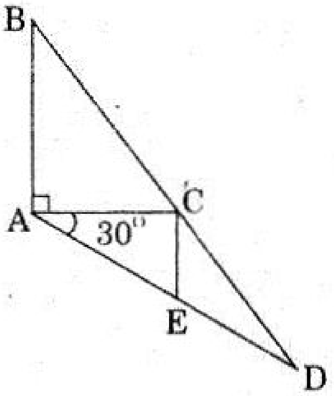
$$\Rightarrow \quad AC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$AB = \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

2. Đường thẳng vuông góc AC tại C cắt AD tại E ⇒ CE // AB

Đặt BC = x ⇒ $AC = \sqrt{x^2 - 1}$

BD = x + 1



Tam giác ACE vuông tại C có $\widehat{CAE} = 30^0$

$$\Rightarrow \quad CE = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}}$$

$$\frac{CE}{AB} = \frac{DC}{DB} \quad \Rightarrow \quad CE.DB = AB.DC$$

$$\Rightarrow \quad (x + 1)\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = 1$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) = 3 \quad \Rightarrow \quad x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^3(x + 2) - 2(x + 2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad (x + 2)(x^3 - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x^3 = 2 \quad (x > 0) \qquad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$

Vậy : $BC = \sqrt[3]{2}$.

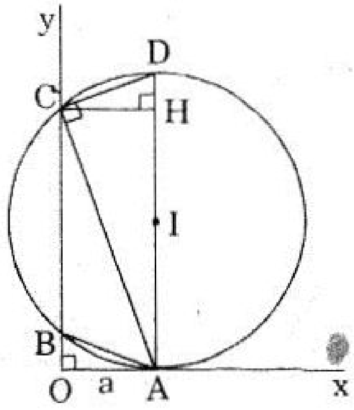
Bài 5

Cho góc vuông xOy và điểm A thuộc tia Ox với $OA = a$ $(a > 0)$. Đường tròn (γ) bán kính R tiếp xúc Ox tại A và cắt tia Oy tại B và C. Chứng minh :

$$AB^2 + AC^2 = 4R^2, \quad \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} \quad \text{và} \quad AB.AC = 2Ra.$$

Giải

Gọi AD là đường kính của đường tròn (γ) và H là hình chiếu vuông góc của C trên AD



$\Rightarrow \quad AD \parallel BC, \qquad CH = OA = a, \qquad AC \perp CD$

$AD \parallel BC \quad \Rightarrow \quad AB = CD$

$\Rightarrow \quad AB^2 + AC^2 = CD^2 + AC^2$

$= AD^2 = 4R^2$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{a^2}$$

$AB.AC = CD.AC = AD.CH = 2Ra.$

Bài 6

Tính góc A của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau :

1. $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ **2.** $bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C = a^2$.

Giải

1. Ta có : $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$

$\Leftrightarrow \quad (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$

$\Leftrightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = a^2 \qquad (b, c > 0)$

$\Leftrightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad A = 60^0 \qquad (0^0 < A < 180^0).$

2. $bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C = a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

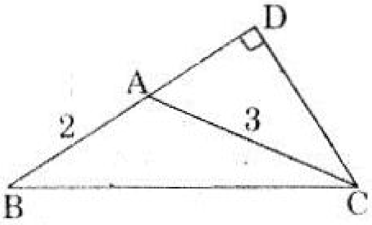
Bài 7

Cho tam giác ABC.

1. Biết AD là đường cao, AC = 2, AB = 3, BC = 4. Chứng minh tam giác ABC có một góc tù và tính CD.
2. Biết $\hat{A} = 60^0$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AC - AB = 2$. Tính AB, AC.

Giải

1. Ta có :



$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 9 + 4 - 16 = -3 < 0$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} < 0$$

$\Rightarrow$ tam giác ABC có góc A tù.

$$\cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = \frac{4 + 16 - 9}{2.2.4} = \frac{11}{16}$$

Tam giác BCD vuông tại D cho :

$$CD = BC\cos C = 4.\frac{11}{6} = \frac{11}{4}.$$

2. Đặt AB = x $\Rightarrow$ AC = x + 2

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 60^0$

$$\Rightarrow 12 = x^2 + (x + 2)^2 - 2x(x + 2).\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 12 = x^2 + x^2 + 4x + 4 - x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad (x > 0)$$

Vậy : AB = 2, AC = 4.

Bài 8

Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1. $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ và $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

2. $a = b\cos C + c\cos B$

3. $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = p^2$

4. $(b+c)\cos^2\frac{A}{2} + (c+a)\cos^2\frac{B}{2} + (a+b)\cos^2\frac{C}{2} = 3p.$

Giải

1. Ta có : $p = \frac{a+b+c}{2}$, $p - a = \frac{b+c-a}{2}$,

$p - b = \frac{c+a-b}{2}$, $p - c = \frac{a+b-c}{2}$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A) = \frac{p(p-a)}{bc} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A) = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

2. $b\cos C + c\cos B = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$

$= 2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B)$

$= 2R\sin(B + C)$

$= 2R\sin A$

$= a.$

3. Ta có : $$bc\cos^2\frac{A}{2} = p(p-a)$$

Tương tự : $$ca\cos^2\frac{B}{2} = p(p-b),\quad ab\cos^2\frac{C}{2} = p(p-c)$$

$$\Rightarrow\ bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = p(p-a+p-b+p-c)$$

$$= p^2.$$

4. Theo câu 2, ta có : $a = b\cos C + c\cos B$

Tương tự có : $b = c\cos A + a\cos C,$

$c = a\cos B + b\cos A$

$$\Rightarrow\ (b+c)\cos^2\frac{A}{2} + (c+a)\cos^2\frac{B}{2} + (a+b)\cos^2\frac{C}{2} =$$

$$= (b+c)\left(\frac{1+\cos A}{2}\right) + (c+a)\left(\frac{1+\cos B}{2}\right) + (a+b)\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)$$

$$= \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C)$$

$$= a+b+c+\frac{1}{2}[(b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A)]$$

$$= a+b+c+\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$= 3p.$$

Bài 9

Cho đường tròn (O_1) tâm O_1, bán kính R_1 và đường tròn (O_2) tâm O_2, bán kính R_2 cắt nhau tại A và B (O_1, O_2 ở hai phía đối với đường thẳng AB). Một đường thẳng tiếp xúc với (O_1) tại C và (O_2) tại D (C và A ở hai phía đối với đường thẳng O_1O_2).

1. Đặt $\widehat{AO_1C} = \alpha$, $\widehat{AO_2D} = \beta$. Tính AC theo R_1 và α, AD theo R_2 và β.

2. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh $R = \sqrt{R_1R_2}$.

Giải

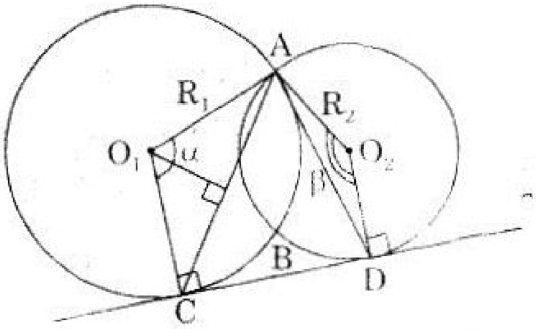
1. Gọi M là trung điểm AC.

Tam giác AO_1M vuông tại M và có $\widehat{AOM} = \alpha$

Cho $AM = R_1\sin\alpha$

$\Rightarrow\quad AC = 2R_1\sin\alpha$

Tương tự có : $AD = 2R_2\sin\beta$



2. CD tiếp xúc với (O_1) và (O_2)

$\Rightarrow\quad \widehat{ACD} = \dfrac{\alpha}{2},\qquad \widehat{ADC} = \dfrac{\beta}{2}$

Tam giác ACD cho :

$$2R = \frac{AC}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{AD}{\sin\widehat{ACD}}$$

$$\Rightarrow\quad 2R = \frac{2R_1\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2R_2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad 4R^2 = \left(\frac{2R_1\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right).\left(\frac{2R_2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = 4R_1R_2$$

$$\Rightarrow\quad R = \sqrt{R_1R_2}\ .$$

Bài 10

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC tại D. Biết BC = 9, $\cos\widehat{BCA} = \dfrac{2}{3}$ và AD = DC. Đặt AD = x. Tính AC, AB theo x. Từ đó suy ra độ dài các cạnh AB, AC.

Giải

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, E, F là tiếp điểm của (I) với AC, AB, M là trung điểm AC.

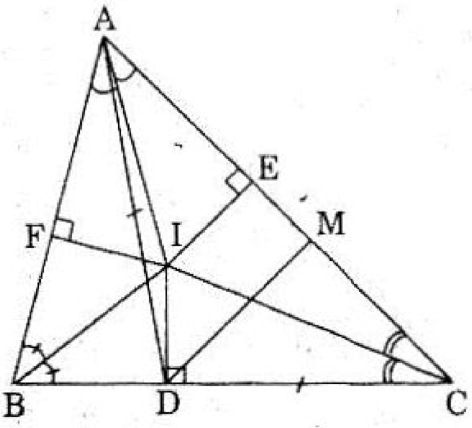
Ta có :

$AD = DC = CE = x$

$\Rightarrow\quad DM \perp AC\ ;\qquad BD = 9 - x$

$\Rightarrow\quad MC = DC\cos\widehat{BCA} = \dfrac{2x}{3}$

$\Rightarrow\quad AC = \dfrac{4x}{3}.$



Ta có : $AB = AF + BF = AE + BD$

$$= AC - CE + BD$$

$$= \frac{4x}{3} - x + 9 - x = 9 - \frac{2x}{3}$$

Ta lại có :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC\cos\widehat{BCA}$$

$$\Rightarrow \left(9 - \frac{2x}{3}\right)^2 = \left(\frac{4x}{3}\right)^2 + 9^2 - 2\left(\frac{4x}{3}\right).9.\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 81 - 12x + \frac{4x^2}{9} = \frac{16x^2}{9} + 81 - 16x$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{3} - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow AB = 7, \quad AC = 4.$$

Bài 11

Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC, BD.

1. Chứng minh rằng :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

2. Suy ra một điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải

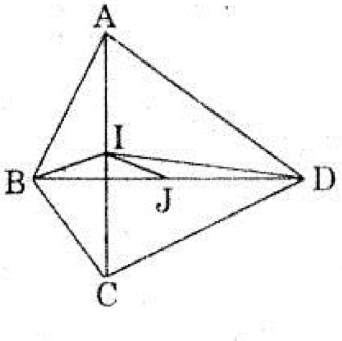
1. Ta có : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 =$

$$= 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$= AC^2 + 2(BI^2 + DI^2)$$

$$= AC^2 + 2(2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2)$$

$$= AC^2 + BD^2 + 4IJ^2.$$



2. ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow I \equiv J$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Bài 12

Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 2BC = 2a$, l là một độ dài cho trước.

1. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

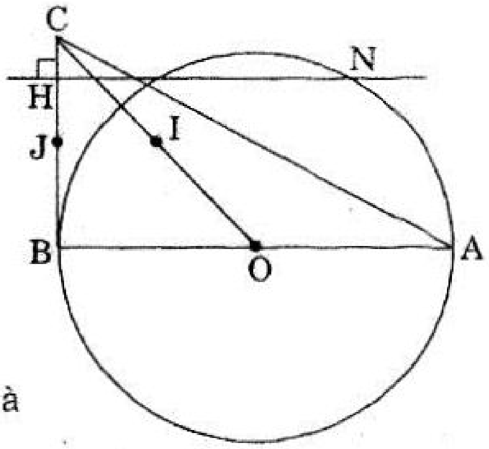
$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = l^2$$

2. Tìm điểm N trên đường tròn đường kính AB sao cho

$$NB^2 - NC^2 = l^2.$$

Giải

1. Gọi O là trung điểm AB, ta có :



$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = l^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2 + 2MC^2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow \quad MO^2 + MC^2 = \frac{l^2}{2} - a^2$$

Gọi I là trung điểm OC, ta có $OI = a\sqrt{2}$ và

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2MI^2 + \frac{1}{2}OC^2 = \frac{l^2}{2} - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2MI^2 + a^2 = \frac{l^2}{2} - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad MI^2 = \frac{l^2 - 4a^2}{4}.$$

Gọi (γ) là tập hợp các điểm M thỏa (1). Ta lần lượt xét các trường hợp :

- $l^2 - 4a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad l < 2a$: (γ) là tập hợp (l, $a > 0$)
- $l^2 - 4a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = 2a$: (γ) chỉ gồm một điểm I
- $l^2 - 4a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad l > 2a$: (γ) là đường tròn tâm I,

bán kính $\dfrac{\sqrt{l^2 - 4a^2}}{2}$.

2. Gọi J là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của điểm N trên đường thẳng BC. Ta có :

$$NB^2 - NC^2 = l^2 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\overline{JH}.\overline{BC} = l^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{JH} \text{ cùng hướng với } \overrightarrow{BC} \\ JH = \dfrac{l^2}{2BC} = \dfrac{l^2}{2a} \end{cases} \qquad (I)$$

$\Leftrightarrow$ H cố định.

Như vậy điểm N thỏa (2) khi và chỉ khi N thuộc đường thẳng d vuông góc với đường thẳng BC tại điểm H xác định bởi (I) và điểm N thuộc đường tròn (O) đường kính BC và thỏa (2) chính là giao điểm của d và (O). Ta có các trường hợp :

- $\dfrac{l^2}{2a} > \dfrac{a}{2}$: d và (O) không có điểm chung

  $\Rightarrow$ không tồn tại điểm N thỏa điều kiện đề bài.

- $\dfrac{l^2}{2a} = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow l = a$: d tiếp xúc (O) tại một điểm

  $\Rightarrow$ có đúng một điểm N thỏa điều kiện đề bài.

- $\dfrac{l^2}{2a} < \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow l < a$: d cắt (O) tại hai điểm phân biệt

  $\Rightarrow$ có hai điểm N thỏa điều kiện đề bài.

Bài 13

Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1. $b^2m_b^2 - c^2m_c^2 = \dfrac{(b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 - c^2)}{4}$

2. Nếu $\dfrac{b}{c} = \dfrac{m_c}{m_b} \neq 1$ thì $\text{cotg}B + \text{cotg}C = 2\text{cotg}A$

3. Nếu $\dfrac{b}{c} = \dfrac{m_c}{m_b}$ và $\hat{A} = 60^0$ thì tam giác ABC đều.

Giải

1. $$b^2m_b^2 - c^2m_c^2 = \frac{b^2(2c^2 + 2a^2 - b^2) - c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{4}$$

$$= \frac{2a^2(b^2 - c^2) - (b^4 - c^4)}{4}$$

$$= \frac{(b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 - c^2)}{4}.$$

2. $\frac{b}{c} = \frac{m_c}{m_b} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b^2m_b^2 - c^2m_c^2 = 0 \\ b^2 - c^2 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = b^2 + c^2$ (câu 1)

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad 4R^2\sin^2 A = 2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(B + C)}{\sin B\sin C} = \text{cotg}A$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}B + \text{cotg}C = \text{cotg}A.$$

3. $\hat{A} = 60^0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^0 = b^2 + c^2 - bc$

$$\Rightarrow \quad 2a^2 - b^2 - c^2 = 2(b^2 + c^2 - bc) - b^2 - c^2 = (b - c)^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2m_b^2 - c^2m_c^2 = \frac{(b^2 - c^2)(b - c)^2}{4} = \frac{(b + c)(b - c)^3}{4} \qquad (*)$$

(câu 1)

Ta lại có : $\frac{b}{c} = \frac{m_c}{m_b} \quad \Rightarrow \quad b^2m_b^2 - c^2m_c^2 = 0 \quad \underset{(*)}{\Rightarrow} \quad b = c$

Ta có : $\hat{A} = 60^0$ và $b = c$ nên ABC là tam giác đều.

Bài 14

Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1. $a = r\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)$ **2.** $a = r_a\left(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)$

3. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ **4.** $r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

5. $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C.$

Giải

1. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC tại A'.

Ta có : $a = BC = BA' + A'C$

$$\begin{aligned} a &= IA'\mathrm{cotg}\widehat{IBA'} + IA'\mathrm{cotg}\widehat{ICA'} \\ &= r\left(\mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Đường tròn (J) bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc BC tại A_1.

Ta có :
$$\begin{aligned} a &= BC = BA_1 + A_1C = JA_1\mathrm{cotg}\widehat{JBA_1} + JA_1\mathrm{cotg}\widehat{JCA_1} \\ &= r_a\left[\mathrm{cotg}\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) + \mathrm{cotg}\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)\right] = r_a\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Theo câu 1, ta có :

$$a = r\left(\mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2R\sin A = \frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad \Rightarrow \quad 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

4. Theo câu 2, ta có :

$$a = r_a\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2R\sin A = r_a\frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad \Rightarrow \quad 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r_a\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad r_a = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

5. Ta có :

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 1 + \frac{r}{R} = \frac{R+r}{R}.$$

Bài 15

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng a, b, c là ba nghiệm của phương trình : $x^3 - 2px^2 + (4Rr + p^2 + r^2)x - 4Rrp = 0$.

Suy ra : $ab + bc + ca = 4Rr + p^2 + r^2$

$abc = 4Rrp$.

Giải

Ta có : $\sin A = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2R} = \frac{p-a}{1 + \left(\frac{r}{p-a}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2R} = \frac{2r(p-a)}{(p-a)^2 + r^2}$$

$\Rightarrow \quad a(p^2 - 2pa + a^2) + ar^2 = 4Rr(p-a)$

$\Rightarrow \quad a^3 - 2pa^2 + (4Rr + p^2 + r^2)a - 4Rrp = 0$

$\Rightarrow \quad x = a$ là một nghiệm của phương trình :

$$x^3 - 2px^2 + (4Rr + p^2 + r^2)x - 4Rrp = 0 \qquad (1)$$

Vai trò a, b, c như nhau trong các hệ số của phương trình (1) nên tương tự ta cũng có x = b, x = c là nghiệm của (1).

Từ đó, theo định lí Viet ta có :

$$ab + bc + ca = 4Rr + p^2 + r^2$$

$$abc = 4Rrp$$

(Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình : $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ $(\alpha \neq 0)$ thì ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{\delta}{\alpha}).$$

Bài 16

Cho tam giác ABC.

1. Chứng minh : $\text{cotg}A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S}$

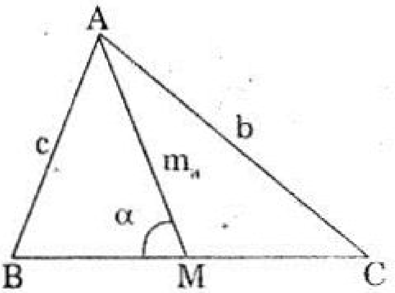
2. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và $\widehat{AMB} = \alpha$.

Chứng minh : $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}C - \text{cotg}B$.

Giải

1. Ta có : $\text{cotg}A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC\sin A}$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{ABC}}$$



2. Đặt BC = a, CA = b, AM = m_a

M là trung điểm BC ⇒ $MB = MC = \dfrac{a}{2}$

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Áp dụng câu 1, ta có :

$$\text{cotg}C - \text{cotg}B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S_{ABC}} = \frac{b^2 - c^2}{4S_{ABC}}$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - c^2}{4S_{ABM}} = \frac{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S_{ABC}}$$

$$= \frac{b^2 - c^2}{4S_{ABC}}$$

⇒ $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}C - \text{cotg}B$.

Bài 17

Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1. $S = \dfrac{1}{4}(b^2\sin 2C + c^2\sin 2B)$

2. $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$

3. $S = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{4}$.

Giải

1. $\frac{1}{4}(b^2\sin 2C + c^2\sin 2B)$

$= \frac{1}{4}(4R^2\sin^2 B.2\sin C\cos C + 4R^2\sin^2 C.2\sin B\cos B)$

$= 2R^2\sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B)$

$= 2R^2\sin B\sin C\sin(B + C)$

$= 2R^2.\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\cdot\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A = S.$

2. Ta có : $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow \sqrt{rr_ar_br_c} = \sqrt{\frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}} = \sqrt{\frac{S^4}{S^2}} = S.$

3. Ta có : $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$

$= \left(\frac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$

$= \frac{16S^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$

$\Rightarrow 4b^2c^2 = 16S^2 + b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2$

$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$

$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{4}.$

Bài 18

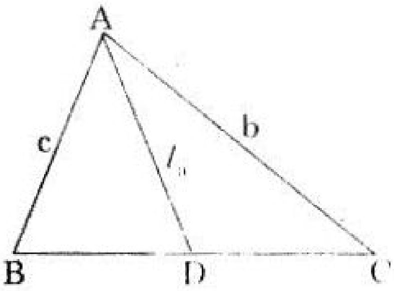
Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1. $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ **2.** $l_a \le \frac{\sqrt{13}}{6}(ab + 2c - a)$.

Giải

1. Gọi AD là phân giác trong của tam giác ABC.

Ta có : $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$



$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c\,l_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b\,l_a\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a\sin\frac{A}{2}(c+b)$$

$$\Rightarrow \quad l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Ta có : $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$\Rightarrow \quad l_a^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a)$$

$$= \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

2. Ta có : $l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a)$

$$\le \frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a) \qquad \text{(do } (b+c)^2 \ge 4bc > 0\text{)}$$

$$= \frac{1}{12}(a+b+c)(3b+3c-3a)$$

$$\frac{1}{12}\left(\frac{a+b+c+3b+3c-3a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(2b+2c-a)^2 \qquad \text{mà} \quad 2b+2c-a > b+c-a > 0$$

$$\Rightarrow \quad l_a \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}(2b+2c-a) = \frac{\sqrt{3}}{6}(2b+2c-a).$$

Bài 19

Cho tam giác ABC.

1. Gọi M là trung điểm BC. Một đường thẳng không qua A cắt các đoạn AB, AC, AM lần lượt tại B', C', M'. Chứng minh :

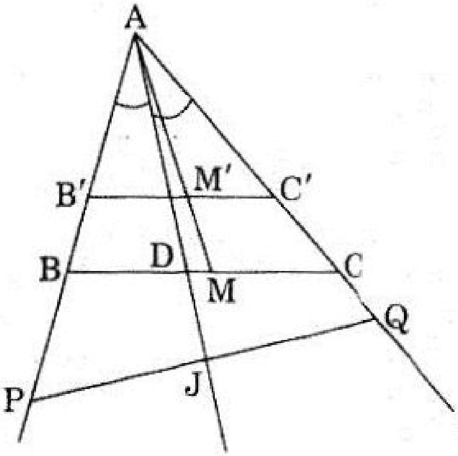
$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=2\frac{AM}{AM'}$$

2. Hai điểm P và Q lần lượt di động trên tia AB và tia AC sao cho

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{1}{l}$$ (l là một độ dài cho trước).

Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



1. M là trung điểm BC

$$\Rightarrow \quad S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Ta có : $$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AB'M'}+S_{AC'M'}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{S_{AB'M'}}{2S_{ABM}}+\frac{S_{AC'M'}}{2S_{ACM}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AC'}{AC}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AM'}{AM}+\frac{AC'}{AC}\cdot\frac{AM'}{AM}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{AM'}{AM}\cdot\left(\frac{AB'}{AB}+\frac{AC'}{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2AM}{AM'}=\frac{AB\,.\,AC}{AB'\,.\,AC'}\cdot\left(\frac{AB'}{AB}+\frac{AC'}{AC}\right)=\frac{AC}{AC'}+\frac{AB}{AB'}$$

2. Gọi AD là phân giác trong của tam giác ABC và J là giao điểm của đường thẳng PQ và tia AJ.

Ta có : $S_{APQ} = S_{APJ} + S_{AQJ}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}AP\,.\,AQ\sin A=\frac{1}{2}AP\,.\,AJ\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}AQ\,.\,AJ\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2AP.AQ\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=AJ\sin\frac{A}{2}(AP+AQ)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{AJ}=\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{AP+AQ}{AP\,.\,AQ}=\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}\left(\frac{1}{AQ}+\frac{1}{AP}\right)$$

$$=\frac{1}{2l\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad AJ = 2l\cos\frac{A}{2}.$$

Ta có tia AD cố định và $AJ = 2l\cos\frac{A}{2}$ không đổi $\Rightarrow$ J cố định.

Bài 20

Cho tam giác ABC.

1. Giả sử điểm I nằm trong tam giác ABC và AI cắt BC tại A', BI cắt CA tại B', CI cắt AB tại C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{IA}{IA'}$$

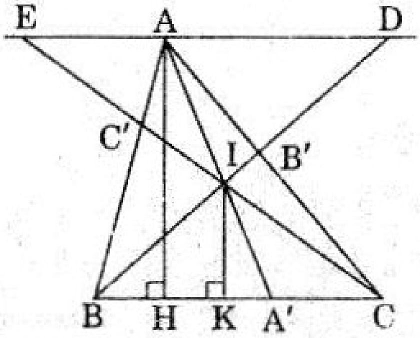
Suy ra : $$\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{\dfrac{B'A}{B'C} + \dfrac{C'A}{C'B} + 1}.$$

2. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $AB = 2AC_1$, $BC = 3BA_1$, $CA = 4CB_1$.

BB_1 cắt CC_1 tại M, CC_1 cắt AA_1 tại N, AA_1 cắt BB_1 tại P.

Tính diện tích các tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP theo diện tích S của tam giác ABC.

Giải



1. Đường thẳng qua A và song song BC cắt đường thẳng BB' và CC' tại D và E. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A và I trên BC.

Ta có : $$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{AD}{BC} + \frac{EA}{BC}$$

$$= \frac{AD + EA}{BC} = \frac{ED}{BC} = \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IA'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AA'}{IA'} = \frac{IA + IA'}{IA'} = \frac{IA}{IA'} + 1 = \frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} + 1$$

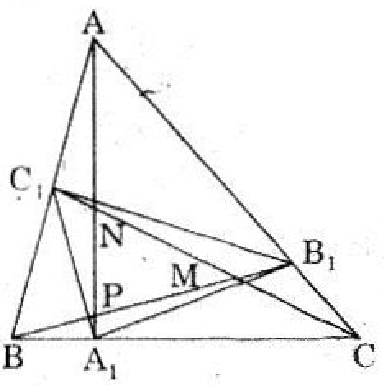
$$\Rightarrow \quad \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} = \frac{IK}{IH} = \frac{IA'}{AA'} = \frac{1}{\dfrac{B'A}{B'C} + \dfrac{C'A}{C'B} + 1}.$$

2. $$\frac{S_{AB_1C_1}}{S} = \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{AC_1}{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{S_{BC_1A_1}}{S} = \frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{S_{CA_1B_1}}{S} = \frac{CA_1}{CB} \cdot \frac{CB_1}{CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad S_{A_1B_1C_1} = S - \frac{3}{8}S - \frac{1}{6}S - \frac{1}{6}S = \frac{7}{24}S$$



Theo câu 1, ta có :

$$\frac{S_{BMC}}{S} = \frac{1}{\frac{C_1A}{C_1B} + \frac{B_1A}{B_1C} + 1} = \frac{1}{1+3+1} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{S_{CNA}}{S} = \frac{1}{\frac{A_1B}{A_1C} + \frac{A_1C}{A_1B} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 2 + 1} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{S_{APB}}{S} = \frac{1}{\frac{B_1C}{B_1A} + \frac{A_1C}{A_1B} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 2 + 1} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \quad S_{MNP} = S - S_{BMC} - S_{CNA} - S_{APB}$$

$$= S - \frac{1}{5}S - \frac{3}{7}S - \frac{3}{10}S = \frac{1}{14}S.$$

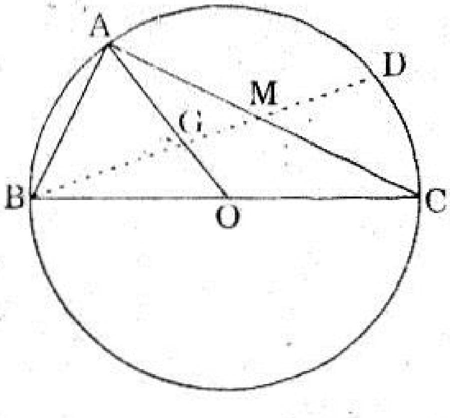
Bài 21

Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn (O), đường kính BC = 2R, AB = R.

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính phương tích của G đối với (O).

b) Kéo dài BG, cắt đường tròn tại D. Tính GD.

Giải



a) Ta có : $\mathscr{P}_{G/(O)} = OG^2 - R^2$

mà $OG = \dfrac{OA}{3} = \dfrac{R}{3}$

suy ra : $\mathscr{P}_{G/(O)} = \left(\dfrac{R}{3}\right)^2 - R^2 = -\dfrac{8R^2}{9}$.

b) Ta có : $\mathscr{P}_{G/(O)} = \overline{GB}.\overline{GD} = -\dfrac{8R^2}{9}$

Suy ra : $GB.GD = \dfrac{8R^2}{9}$. Để tính GD, ta cần tính $GB = \dfrac{2}{3}BM$ (M là trung điểm của AC).

Trong tam giác vuông ABM, ta có :

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7R^2}{4}$$

Suy ra : $GB = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{R\sqrt{7}}{2} = \dfrac{R\sqrt{7}}{3}$

Vậy : $GD = \dfrac{8R^2}{9}\cdot\dfrac{3}{R\sqrt{7}} = \dfrac{8R}{3\sqrt{7}} = \dfrac{8R\sqrt{7}}{21}$.

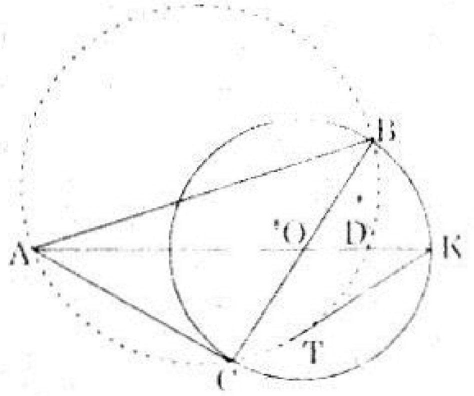
Bài 22

Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định ở ngoài (O) và OA = 2R. Gọi BC là một đường kính di động của (O). Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AO cắt đường tròn (I) tại D ≠ A.

a) Tính OD, suy ra D là điểm cố định.

b) AO kéo dài cắt đường tròn (O) tại K. Tính độ dài của tiếp tuyến KT vẽ từ K tới đường tròn (I). T di động trên đường nào khi BC quay quanh O.

Giải



a) Ta có AOD và BOC là hai cát tuyến của đường tròn (I), do đó :

$$OA.OD = OB.OC = R^2$$

Vậy : $OD = \dfrac{R}{2}$

Suy ra D là điểm cố định.

b) KT là tiếp tuyến, KAD là cát tuyến vẽ từ K tới đường tròn (I), do đó :

$$KT^2 = KA.KD = \left(\frac{5R}{2}\right).\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{5R^2}{4}$$

Suy ra : $KT = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$

Mà K cố định, nên T di động trên đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Bài 23

Cho tam giác ABC có góc B tù, đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H lên AB và AC.

a) Chứng minh tứ giác BCFE nội tiếp được.

b) EF cắt BC tại I, IA cắt đường tròn đường kính AH tại G. Chứng minh A, B, C, G cùng thuộc một đường tròn.

Giải

a) Ta chứng minh : $\overline{AB.AE} = \overline{AC.AF}$

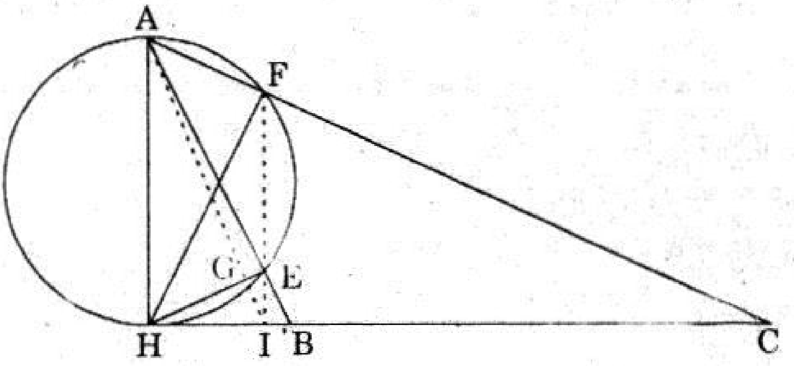
Trong tam giác vuông ABH với đường cao HE : $\overline{AB.AE} = AH^2$

Trong tam giác vuông ACH với đường cao HF : $\overline{AC.AF} = AH^2$

Suy ra : $\overline{AB.AE} = \overline{AC.AF}$.

Vậy tứ giác BCFE nội tiếp.

b) Ta chứng minh : $\overline{IB.IC} = \overline{IA.IG}$



Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn (BCFE) :

$$\overline{IB.IC} = \overline{IE.IF}$$

Mặt khác E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH, do đó :

$$\overline{IE.IF} = \overline{IA.IG}$$

Do đó : $\overline{IB.IC} = \overline{IA.IG}$

Vậy bốn điểm A, B, C, G cùng thuộc một đường tròn.

Bài 24

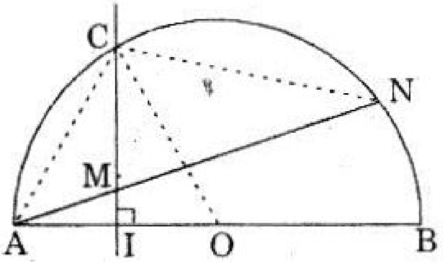
Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R, trung trực của OA cắt OA tại I và nửa đường tròn tại C. Một đường thẳng bất kì qua A cắt IC và đường tròn lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh AC là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác (CMN).

b) Định vị trí của M để đường tròn (ACM) tiếp xúc với AB.

Giải

a) Ta chứng minh : $AC^2 = \overline{AM . AN}$.



Hai tam giác AMC và ACN đồng dạng vì có : góc A chung và

$\widehat{ACM} = \widehat{ANC}$(chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra : $AC^2 = AM.AN$

Mà $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng, do đó :

$$AC^2 = \overline{AM}.\overline{AN}$$

Do đó AC là tiếp tuyến tại C với đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

b) AB tiếp xúc với đường tròn (ACM) tại A khi :

$IA^2 = IC.IM$ (1) (C, M cùng phía đối với I)

Mà : $IA = \dfrac{R}{2}$ và $IC = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều OAC)

Do đó : (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{R^2}{4} = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}.IM$

$\Leftrightarrow$ $IM = R\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài 25

Cho tam giác ABC. Gọi BM và CN lần lượt là trung tuyến của tam giác ABC. Gọi (O) và (O') lần lượt là đường tròn đường kính BM và CN.

a) Chứng minh A có cùng phương tích đối với (O) và (O').

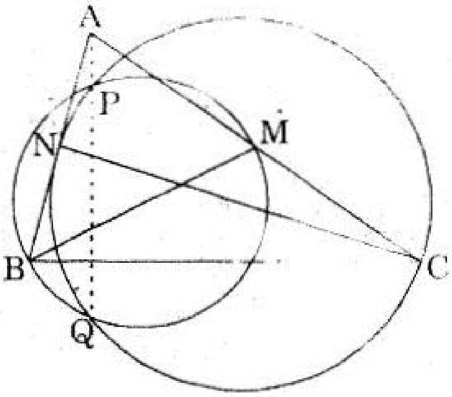
b) Gọi P, Q là giao điểm của (O) và (O'). Chứng minh A, P, Q thẳng hàng.

Giải

a) Ta nhớ phương tích của điểm A đối với đường tròn đường kính BM cho bởi :

$$\mathscr{P}_{A/(O)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$$

$$= \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$



Tương tự : $\mathscr{P}_{A/(O')} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$

$$= \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Do đó : $\mathscr{P}_{A/(O)} = \mathscr{P}_{A/(O')}$ (đpcm).

b) Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P và Q nên đường thẳng PQ chính là trục đẳng phương của (O) và (O'). Mà A có cùng phương tích đối với (O) và (O'), do đó A thuộc đường thẳng (PQ) (đpcm).

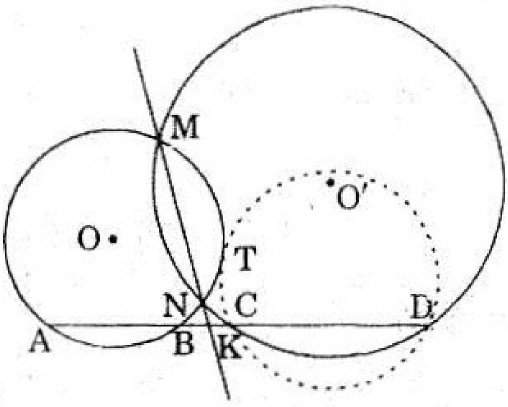
Bài 26

Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. (O) và (O') lần lượt là đường tròn di động qua A, B và C, D và (O), (O') cắt nhau tại M và N.

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định. Nếu (O) và (O') tiếp xúc nhau tại T thì kết quả trên thay đổi thế nào ?

b) Cho trước (O), hãy dựng đường tròn (O') tiếp xúc với (O).

Giải



a) Gọi K là giao điểm của MN và đường thẳng AB. Ta chứng minh K là điểm cố định.

Vì K thuộc trục đẳng phương MN của (O) và (O'), ta suy ra :

$$\mathscr{P}_{K/(O)} = \mathscr{P}_{K/(O')}$$

$$\Leftrightarrow \overline{KA}.\overline{KB} = \overline{KC}.\overline{KD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KA} - \overline{KC}}{\overline{KD} - \overline{KB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BD}} \text{ : giá trị không đổi.}$$

K chia đoạn AD cố định theo một tỉ số không đổi nên K là điểm cố định. Vậy MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

* Nếu (O) và (O') tiếp xúc nhau tại T thì ta có tiếp tuyến chung tại T của hai đường tròn đi qua K.

b) * Dựng đường tròn (O'') bất kì qua C, D và cắt (O) tại M và N.

* Dựng giao điểm K của MN và đường thẳng AB.

* Dựng tiếp tuyến KT vẽ từ K tới (O), T là tiếp điểm.

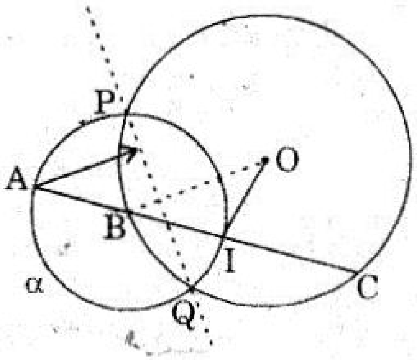
* Dựng đường tròn qua C, D, T ⇒ đó là đường tròn (O') phải dựng.

Bài 27

Cho đường tròn (O, R) và một điểm A ở ngoài (O). Qua A vẽ cát tuyến ABC với (O) và $BC = 2AB = R\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AI cắt (O) tại P và Q.

Tính khoảng cách từ A đến PQ.

Giải



Gọi (α) là đường tròn đường kính AI, tâm B.

PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (α).

Gọi d là khoảng cách từ A tới PQ, ta có theo định lí Casey :

$$\mathcal{P}_{A/(O)} - \mathcal{P}_{A/(\alpha)} = 2.OB.d$$

Ta có : $\mathcal{P}_{A/(O)} = AB.AC = R\frac{\sqrt{3}}{2}.3R\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9R^2}{4}$

$\mathcal{P}_{A/(\alpha)} = 0$ và $BO = R$

Suy ra : $\frac{9R^2}{4} = 2.R.d \Rightarrow d = \frac{9R}{8}$.

Bài 28

Cho tam giác ABC biết a = 17,4m ; $\hat{B} = 44^0 30'$; $\hat{C} = 64^0$.

Tính $\hat{A}$, b, c.

Giải

Ta có : $\widehat{A} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^0 - (44^030' + 64^0) = 71^030'$

Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Do đó : $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A} \approx \dfrac{17,4 . 0,7009}{0,9483} \approx 12,9\,(m)$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \approx \frac{17,4 . 0,8988}{0,9483} \approx 16,5\,(m).$$

Bài 29

Cho tam giác ABC có $a = 49,4cm$; $b = 26,4cm$; $\widehat{C} = 47^020'$.

Tính cạnh c, các góc A, B.

Giải

Theo định lí cosin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 . 49,4 . 26,4 . 0,6777 \approx 1369,66$$

Vậy $c \approx \sqrt{1369,66} \approx 37\ (cm)$

Vì $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \dfrac{697 + 1370 - 2440}{2 . 26,4 . 37} \approx -0,191$

Như vậy A là một góc tù và ta có $\widehat{A} \approx 101^0$.

Do đó $\widehat{B} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^0 - (101^0 + 47^020') \approx 31^040'$.

Bài 30

Cho tam giác ABC có a = 24cm, b = 13cm, c = 15cm.

Tính các góc A, B, C.

Giải

Theo định lí cosin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{169 + 225 - 576}{2.13.15} \approx -0,4667$$

Như vậy A là góc tù và ta tính được $\hat{A} \approx 117^0 49'$.

Vì $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

nên $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a} = \dfrac{13 . \sin 17^0 49'}{24} = \dfrac{13 . \sin 62^0 11'}{24}$

$$\sin B \approx \frac{13 . 0{,}8845}{24} \approx 0{,}4790$$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 28^0 37'$$

$$\hat{C} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^0 - (117^0 49' + 28^0 37')$$

$$\approx 33^0 34'.$$

Bài 31

Người ta muốn biết chiều cao h = CD của một cái tháp với C là chân tháp và D là đỉnh tháp. Từ hai điểm A và B có khoảng cách 24m, sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, người ta đo được $\widehat{CAD} = 63^0$, $\widehat{CBD} = 48^0$.

Tính chiều cao h của tháp.

Giải

Gọi $\alpha = \widehat{CAD}$, $\beta = \widehat{CBD}$ và áp dụng định lí sin vào tam giác ABD, ta có :

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$$

Ta có : $\alpha = \hat{D} + \beta$ nên $\hat{D} = \alpha - \beta = 63^0 - 48^0 = 15^0$

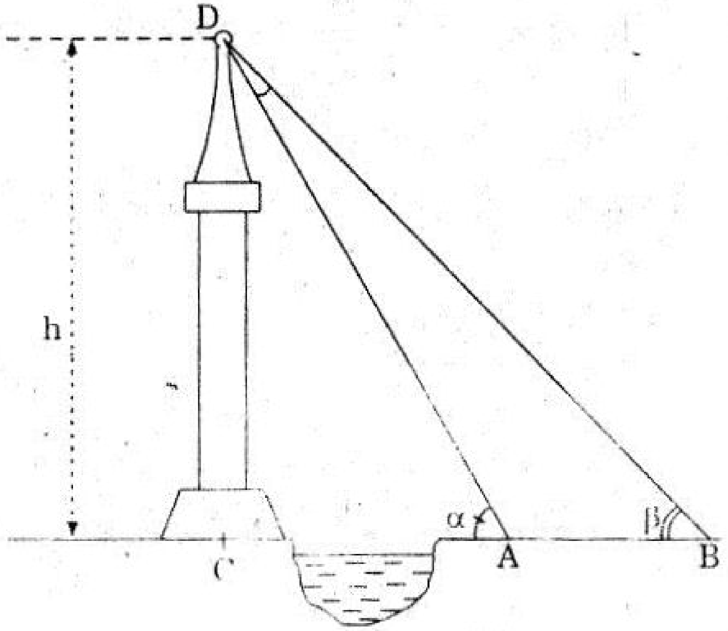
Do đó : $AD = \dfrac{AB . \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

Trong tam giác vuông ACD ta có :

$$h = CD = AD \sin \alpha = \frac{AB . \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Do đó : $h = \dfrac{24 . \sin 48^0 . \sin 63^0}{\sin 15^0} \approx \dfrac{24 . 0{,}7431 . 0{,}891}{0{,}2588}$

$$h \approx 61{,}4 \text{ (m)}.$$



Bài 32

Để tính khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến một gốc cây C trên một cù lao ở giữa sông, người ta chọn một điểm B cũng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C với $\widehat{CAB} = 45^0$, $\widehat{CBA} = 70^0$ và khoảng cách AB = 40m.

Hãy tính khoảng cách AC.

Giải

Gọi $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{CBA}$, ta có :

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{40}{\sin C}$$

mà $\sin C = \sin(\alpha + \beta) = \sin(45^0 + 70^0)$

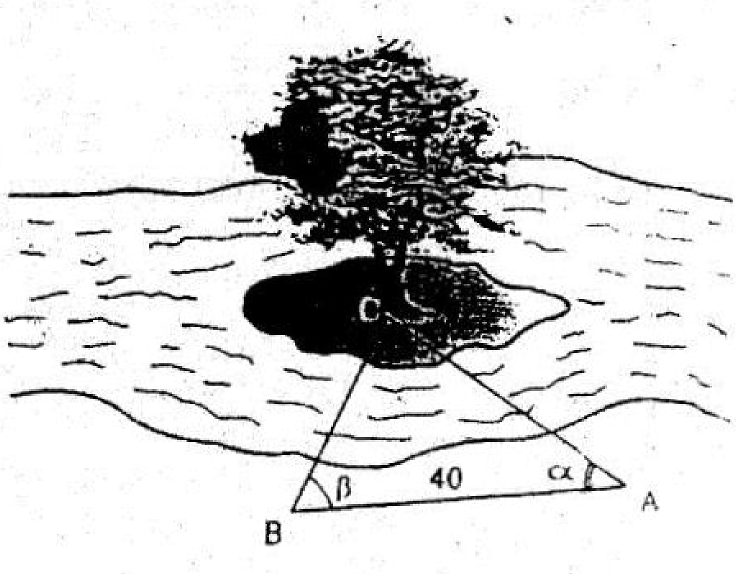
Do đó :

$$AC = d = \frac{40.\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{40.\sin 70^0}{\sin 115^0}$$

$$d \approx \frac{40.0,9397}{0,9063}$$

$$\approx 41,47 \text{ (m)}$$



C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\widehat{B} = 60^0$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu ?

A. 49 B. $\sqrt{97}$ C. 7 D. $\sqrt{61}$.

2. Tam giác ABC có $a = 3$, $b = 7$, $c = 8$, góc B bằng bao nhiêu ?

A. 60^0 B. 30^0 C. 45^0 D. 72^0.

3. Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$ B. $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$

C. $c = 2R\sin(A + B)$ D. $b = R\sin A$.

4. Tam giác ABC có cosB bằng biểu thức nào sau đây ?

A. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ B. $\sqrt{1 - \sin^2 B}$

C. $\cos(A + C)$ D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

5. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của tam giác ABC bằng biểu thức nào sau đây ?

A. $\frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ B. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2} + \frac{c^2}{4}}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2) - c^2}$ D. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4}}$.

6. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $S = a.h_a$ B. $S = \frac{1}{2}ab\cos C$

C. $S = \frac{abc}{4R}$ D. $S = ab\sin C$.

7. Tam giác ABC có ba cạnh thỏa mãn hệ thức : $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Góc B bằng bao nhiêu ?

A. 150^0 B. 120^0 C. 60^0 D. 30^0.

8. Tam giác ABC có $a = 6$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{9}$ B. 9 C. 3 D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

9. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $\cos B + \cos C = 2\cos A$ B. $\sin B + \sin C = 2\sin A$

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin A$ D. $\sin B + \cos C = 2\sin A$.

10. Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu ?

A. 84 B. $\sqrt{84}$ C. 42 D. $\sqrt{168}$.

11. Một tam giác có ba cạnh là 26, 28, 30. Bán kính vòng nội tiếp là bao nhiêu ?

A. 16 B. 8 C. 4 D. $4\sqrt{2}$.

12. Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính vòng ngoại tiếp bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{65}{8}$ B. 40 C. 32,5 D. $\frac{65}{4}$.

13. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1; -2)$, $B(-2; 3)$, $C(0; 4)$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{13}{2}$ B. 13 C. 26 D. $\frac{13}{4}$.

14. Cho tam giác ABC, biết $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$ & $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$.

Để tính diện tích S của tam giác ABC. Một học sinh làm như sau :

(I) Tính $\cos A = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

(II) Tính $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2}}$

(III) $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2}$

(IV) $S = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 + a_2b_1)^2}$

$S = \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1)$

Lập luận trên sai từ bước nào ?

A. (I) B. (II) C. (III) D. (IV).

15. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ B. $S = (a^2 + b^2 + c^2)$

C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ D. $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

§2. GIẢI TAM GIÁC

1. Cho tam giác ABC, biết a = 17,4 ; $\widehat{B} = 44^0 33'$; $\widehat{C} = 64^0$. Cạnh b bằng bao nhiêu ?

A. 16,5 B. 12,9 C. 15,6 D. 22,1.

Cho tam giác ABC, biết a = 16,8 ; $\widehat{B} = 56^0 13'$; $\widehat{C} = 71^0$. Cạnh c bằng bao nhiêu ?

A. 29,9 B. 14,1 C. 17,5 D. 19,9.

3. Cho tam giác ABC, biết a = 49,4 ; b = 26,4 ; $\widehat{C} = 47^0 20'$. Tính cạnh c.

A. 64 B. 37 C. 28,5 D. 136,9.

4. Cho tam giác ABC, biết a = 27,9 ; c = 14,3 ; $\widehat{B} = 132^0 24'$. Tính cạnh b ?

A. 19,5 B. 37 C. 28 D. 39.

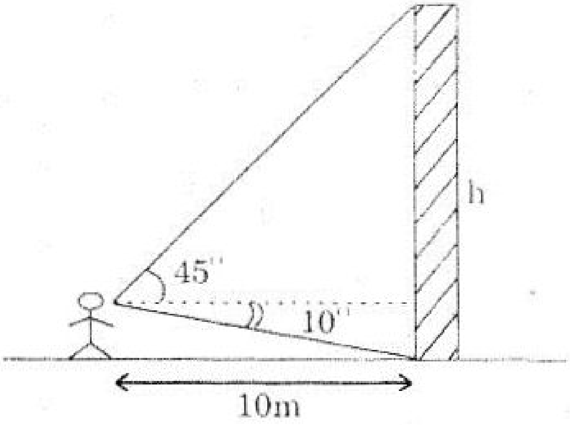
5. Cho tam giác ABC, biết a = 24, b = 13, c = 15. Tính góc A ?

A. $33^0 34'$ B. $117^0 49'$ C. $28^0 37'$ D. $58^0 24'$.

6. Cho tam giác ABC, biết a = 13, b = 14, c = 15. Tính góc B ?

A. $59^0 49'$ B. $53^0 7'$ C. $59^0 29'$ D. $62^0 22'$.

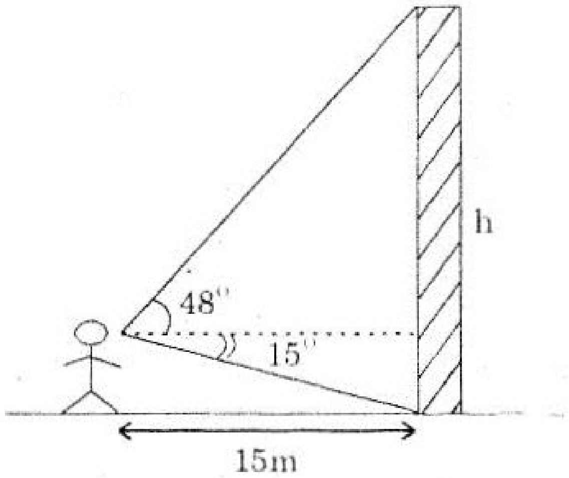
7. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10m, nhìn thẳng cái tháp dưới góc 55^0 và được phân tích như trong hình. Tính chiều cao của tháp ?



A. 12m B. 24m

C. 16m D. 67m.

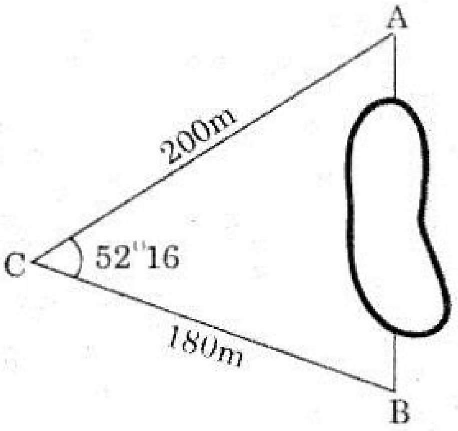
8. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 15m, nhìn thẳng cái tháp dưới góc 63^0 và được phân tích như trong hình. Tính chiều cao của tháp ?



A. 20m B. 69m

C. 15m D. 16m.

9. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^0 16'$. Biết CA = 200m, CB = 180m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu ?



A. 163m B. 224m

C. 112m D. 168m.

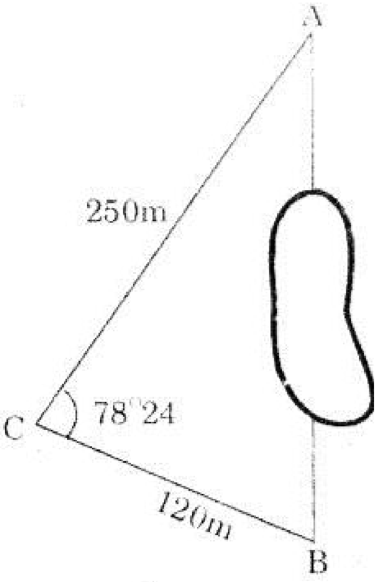
10. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^0 24'$. Biết CA = 250m, CB = 120m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu ?

A. 266m

B. 255m

C. 166m

D. 298m.



11. Từ đỉnh một cái tháp chiều cao CD = 80m, người ta nhìn hai điểm và B trên mặt đất dưới các góc là $72^0 12'$ và $34^0 26'$. Ba điểm A, B, thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

A. 71m B. 91m C. 79m D. 40m.

12. Cho tam giác ABC, biết $\hat{A} = 68^0 12'$, $\hat{B} = 34^0 44'$, AB = 117. Tính AC

A. 68 B. 168 C. 118 D. 200.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh là a. Tính phương tíc của điểm A đối với đường tròn (C, a) có tâm là C, bán kính R = a.

A. $2a^2$ B. a^2 C. $\frac{a^2}{2}$ D. $\frac{a^2}{4}$.

2. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh là a. Tính phương tíc của điểm A đối với đường tròn đường kính CD bằng bao nhiêu ?

A. a^2 B. a C. $2a^2$ D. $\frac{a}{2}$.

3. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh là a. Tính phương tíc của điểm A đối với đường tròn (O, a) tâm O, bán kính R = a bằng ba nhiêu ?

A. a^2 B. $\frac{a^2}{2}$ C. $-\frac{a^2}{2}$ D. $-2a^2$.

4. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh là a. Trong các mệnh đ sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $\mathscr{P}_{A/\left(O,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} = 0$ B. $\mathscr{P}_{O/\left(B,\frac{a}{2}\right)} = \frac{3a^2}{4}$

C. $\mathscr{P}_{O/(O,a)} = -a^2$ D. $\mathscr{P}_{O/(A,a)} = \frac{a^2}{2}$.

. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh là a. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $\mathscr{P}_{A/(B,a)} = a^2$ B. $\mathscr{P}_{B/(O,a)} = \frac{a^2}{2}$

C. $\mathscr{P}_{C/(A,a\sqrt{2})} = 0$ D. $\mathscr{P}_{D/(O,a\sqrt{2})} = 2a^2$.

. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và có trực tâm H. Tính phương tích của điểm H đối với đường tròn đường kính BC.

A. $-\frac{a^2}{6}$ B. $-\frac{a^2}{3}$ C. $\frac{a^2}{4}$ D. $-\frac{a^2}{2}$.

. Cho tam giác đều ABC có cạnh là a. Phương tích của điểm A đối với đường tròn đường kính BC bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{a^2}{4}$ B. $\frac{a^2}{2}$ C. $\frac{3a^2}{4}$ D. a^2.

. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trục đẳng phương của hai đường tròn $\left(A, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(B, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ là đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây ?

A. AB B. AC C. BD

D. Trung trực của AB.

. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp hình vuông và đường tròn tâm B bán kính R = a.

A. AC B. AB C. BC D. OB.

0. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau ở I. Hai điểm A và A' nằm trên a, hai điểm B, B' nằm trên b sao cho $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IB}.\overline{IB'}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. Đường tròn (AA'B) đi qua B'
B. Đường tròn (AA'B') đi qua

C. Đường tròn (ABB') đi qua A'
D. Đường tròn (IBA') đi qua I

11. Cho góc xOy, điểm A nằm trên tia Ox, hai điểm B và C nằm trên t Oy sao cho $OA^2 = OB.OC$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai

A. Ox tiếp xúc với đường tròn (ABC)

B. $\widehat{BAO} = \widehat{BCA}$
C. $\widehat{CAx} = \widehat{ACO}$
D. $\widehat{CBA} = \widehat{CAx}$.

12. Cho IMQ và INP là hai cát tuyến của cùng một đường tròn. Tro các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $\overline{MI}.\overline{QI} = \overline{NI}.\overline{PI}$
B. $IM^2 = IN.IP$

C. $IN^2 = IM.IQ$
D. $\overline{IM}.\overline{IQ} = \overline{IN}.\overline{PI}$.

13. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O, R) cắt nhau tại I. Tro các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $IA.IB = OM^2 - R^2$
B. $IC.ID = R^2 - OM^2$

C. $IA.IB = \overline{IC}.\overline{ID}$
D. $\overline{IA}.\overline{IB} = IC.ID$.

14. Cho đường tròn O và hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn :

$$\mathscr{P}_{N/(O)}.\mathscr{P}_{B/(O)} < 0$$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. Đường thẳng AB tiếp xúc với (O)

B. Đường thẳng AB không có điểm chung với (O)

C. Đường thẳng AB đi qua (O)

D. Đường thẳng AB cắt (O).

15. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', 2R) cắt nhau tại A và B. PQ là n tiếp tuyến chung của chúng. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đún

A. AB vuông góc với PQ
B. AB đi qua trung điểm của I

C. AB // PQ
D. OO' // PQ.

16. Tập hợp các điểm M có cùng phương tích đối với hai đường t (O, R) và (O, 2R) là tập hợp nào sau đây ?

A. Một đường thẳng
B. Một đường tròn

C. Tập hợp rỗng
D. Toàn bộ mặt phẳng.

hương III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

A. LÍ THUYẾT

§1. Hệ trục tọa độ

Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Hệ trục Oxy gồm hai trục Ox và Oy vuông góc với nhau với hai vect đơn vị lần lượt là $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ $(|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1)$

2. $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$

$\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$

3. Cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$

Ta có : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$k.\vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1b_1 + a_2b_2)$$

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

II. Các dạng toán cơ bản và phương pháp giải :

1. Vấn đề 1 :

Tìm tọa độ của một điểm, tọa độ của một vectơ.

Để tìm tọa độ của một điểm M(x, y) hay một vectơ $\vec{m}(x, y)$ ta thường tìm những hệ thức vectơ cho phép ta lập một hệ phương trình mà 2 ẩn là tọa độ (x, y). Các hệ thức này thường được chia thành 4 loại.

Loại 1 : Vectơ bằng nhau :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Loại 2 : Vectơ cùng phương :

$$\vec{a} = k\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

Lưu ý : A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Loại 3 : Vectơ vuông góc :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

Loại 4 : Độ dài, khoảng cách :

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Vấn đề 2 : Tọa độ các điểm đặc biệt của tam giác.

* G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

* H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

* I là tâm vòng ngoại tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

3. **Vấn đề 3 :** Góc giữa hai vectơ

* Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

* *Chú ý :* Cho tam giác ABC, ta có : $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$

* Hệ quả : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow$ Góc A nhọn

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0 \Leftrightarrow$ Góc A tù

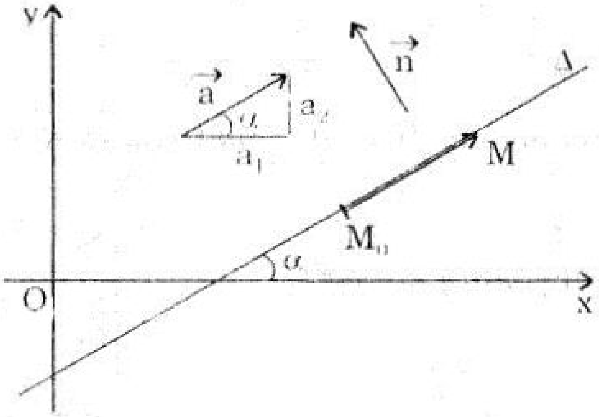
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow$ Góc A vuông.

§2. Đường thẳng

I. Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2)$ là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$$



2. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2)$ là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (a_1a_2 \neq 0)$$

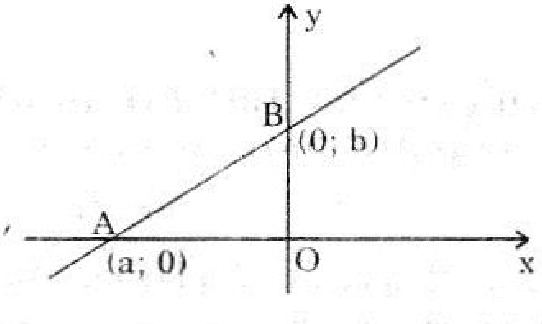
3. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có hệ số góc k là :
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

4. - Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2)$ với $a_1 \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là :
$$k = \frac{a_2}{a_1}$$
   - Nếu Δ có hệ số góc là k thì Δ có một vectơ chỉ phương là :
$$\vec{a} = (1, k)$$

5. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B)$ là :
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

6. Phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

7. Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại A(a, 0) và B(0, b) có phương trình theo đoạn chắn là :
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a, b \neq 0)$$



8. Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Đặt $D = A_1B_2 - A_2B_1$

$D_x = B_1C_2 - B_2C_1$

$D_y = C_1A_2 - C_2A_1$

Ta có : **a)** Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow D \neq 0$

b) $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ hay } D_y \neq 0 \end{cases}$

c) $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$

Chú ý : Nếu $A_2B_2C_2 \neq 0$ thì :

a) Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

b) $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

c) $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

9. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức :

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\ |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

10. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ được cho bởi công thức :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

II. Các dạng toán cơ bản và phương pháp giải :

1. Vấn đề 1 :

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ, PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp :

Để viết phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

* Tìm vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ của đường thẳng Δ.

* Tìm một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc Δ.

* Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$

* Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$

Chú ý :

* Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (1, k)$.

- Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, B)$ thì Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (-B, A)$ hoặc $\overrightarrow{a} = (B, -A)$.

Vấn đề 2 :

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

- Tìm một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, B)$ của Δ.
- Tìm một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc Δ.
- Dùng công thức : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
- Biến đổi về dạng : $Ax + By + C = 0$

Chú ý :

- Nếu Δ cùng phương với $d : Ax + By + C = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát :

$$Ax + By + C' = 0$$

- Nếu Δ vuông góc với $d : Ax + By + C = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát :

$$-Bx + Ay + C'' = 0$$

Vấn đề 3 :

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp :

- Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Ta có các trường hợp sau :

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

$$\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

* Tọa độ giao điểm Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

* Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được cho bởi công thức :

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

4. Vấn đề 4 :

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp :

* Để tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0)$ đến đường thẳng

$$\Delta : Ax + By + C = 0$$

ta dùng công thức $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

* Đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ chứa mặt phẳng Oxy thànl mặt phẳng có bờ là Δ.

- Một nửa mặt phẳng chứa các điểm $M_1(x_1, y_1)$ thỏa mãn

$$\Delta(M_1) = Ax_1 + By_1 + C > 0.$$

- Nửa còn lại chứa các điểm $M_2(x_2, y_2)$ thỏa mãn

$$\Delta(M_2) = Ax_2 + By_2 + C < 0.$$

* Gọi d và d' là hai phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳn nhau $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Ta có :

$$M(x, y) \in d \cup d' \Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Vậy phương trình của hai phân giác của các góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2

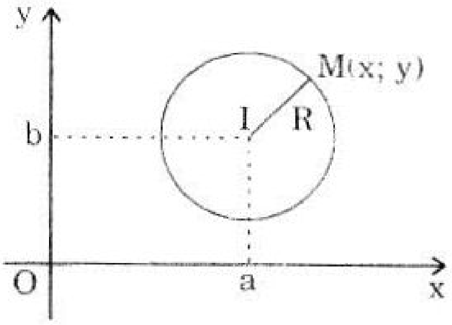
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

§3. Đường tròn

ác kiến thức cơ bản cần nhớ :

Phương trình đường tròn tâm I(a, b) bán kính R là :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$



Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn tâm I(a, b) bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ của đường tròn tâm I(a, b) có phương trình :

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

Các dạng toán cơ bản và phương pháp giải :

Vấn đề 1 :

NHẬN DẠNG MỘT PHƯƠNG TRÌNH LÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH

Phương pháp :

Cách 1 : * Đưa phương trình về dạng :

$$x^2+y^2-2ax-2by+C=0 \qquad (1)$$

* Kiểm tra điều kiện

$$a^2+b^2-c>0$$

* Nếu thỏa mãn điều kiện trên thì (1) là phương trình đường tròn tâm I(a, b) bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Cách 2 : * Đưa phương trình về dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2=m \qquad (2)$$

* Nếu $m>0$ thì (2) là phương trình đường tròn tâm I(a, b) bán kính $R=\sqrt{m}$.

2. Vấn đề 2 :

LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN ($\mathscr{C}$).

Phương pháp :

Cách 1 : * Tìm tọa độ tâm I(a, b) của đường tròn ($\mathscr{C}$).

* Tìm bán kính R của ($\mathscr{C}$).

* Viết phương trình theo dạng

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (1$$

Chú ý : * ($\mathscr{C}$) đi qua A, B ⇔ $IA^2 = IB^2 = R^2$

* ($\mathscr{C}$) đi qua A và tiếp xúc với Δ ⇔ IA = d(I, Δ)

* ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2 ⇔ $d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2)$

Cách 2 : * Gọi phương trình của ($\mathscr{C}$) là

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad (2$$

* Đặt hệ phương trình với ẩn số là a, b, c.

* Giải hệ phương trình tìm a, b, c thế vào (2) ta đ phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$).

3. Vấn đề 3 :

LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN ($\mathscr{C}$).

Phương pháp :

Loại 1 :

Tiếp tuyến tại một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc đường tròn.

* Tìm tọa độ tâm I(a, b) của ($\mathscr{C}$).

* Phương trình tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) tại $M_0(x_0, y_0)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

Loại 2 :

Lập phương trình tiếp tuyến Δ với ($\mathscr{C}$) khi chưa biết tiếp điểm.

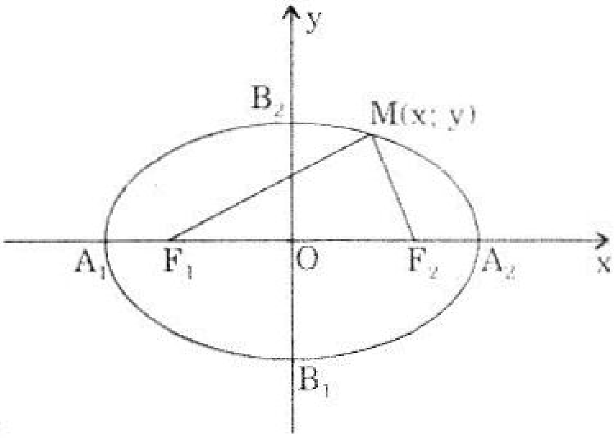
* Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định Δ :

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) tâm I bán kính R ⇔ d(I, Δ) = R.

§4. Ba đường conic

I. Các kiến thức cơ bản cần nhớ :

1. Elip :



a) Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ và độ dài không đổi 2a $(a > c > 0)$.

$$(E) = \{M / F_1M + F_2M = 2a\}$$

b) Phương trình chính tắc của elip (E) là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 = b^2 + c^2)$$

c) Các thành phần của elip (E) là :

- Hai tiêu điểm : $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$
- Bốn đỉnh : $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$
  $B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$
- Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a$
- Độ dài trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$
- Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$.

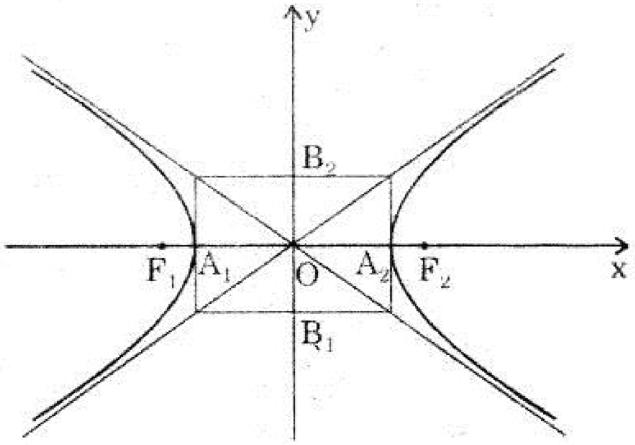
2. Hyperbol :

a) Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$ và độ dài không đổi 2a $(c > a > 0)$

$$(H) = \{M / |F_1M - F_2M| = 2a\}$$

b) Phương trình chính tắc của hypebol (H) là :

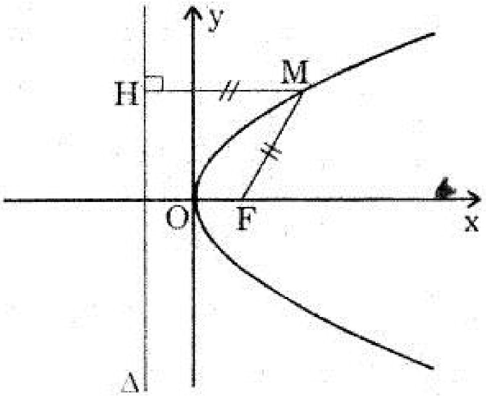
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$



c) Các thành phần của hypebol (H) là :

- Hai tiêu điểm : $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$.
- Hai đỉnh : $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$.
- Độ dài trục thực : $A_1A_2 = 2a$
- Độ dài trục ảo : $B_1B_2 = 2b$
- Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$
- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a}$
- Hai đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

3. Parabol :



a) Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ và đường thẳng

$\Delta : x = \dfrac{-p}{2}$ $(p > 0)$

$$(P) = \{M / MF = d(M, \Delta)\}$$

b) Phương trình chính tắc của parabol (P) là :

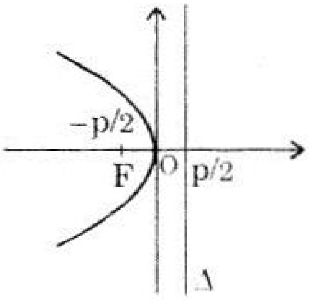
$$y^2 = 2px$$

c) Các thành phần của (P) là :

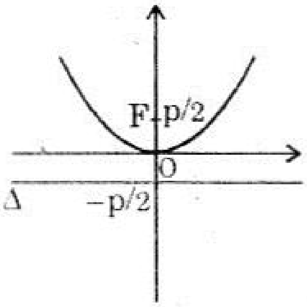
- Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

- Đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

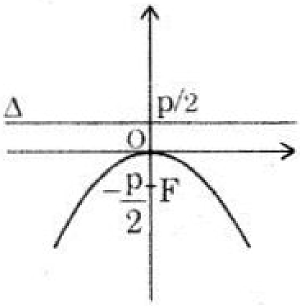
d) Ngoài dạng chính tắc $y^2 = 2px$, parabol còn có các dạng sau trong mặt phẳng Oxy.



$y^2 = -2px \ (p > 0)$



$x^2 = 2py \ (p > 0)$



$x^2 = -2py \ (p > 0)$

II. Các dạng toán cơ bản và phương pháp giải :

1. Vấn đề 1 :

LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA MỘT CONIC KHI BIẾT CÁC THÀNH PHẦN ĐỦ ĐỂ XÁC ĐỊNH CONIC ĐÓ

Phương pháp :

- Từ các thành phần đã biết, áp dụng các công thức liên quan ta rút ra được các thành phần xác định phương trình chính tắc của conic như a, b, p.
- Lập phương trình chính tắc của conic theo các công thức :

Elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hypebol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parabol : $y^2 = 2px$

2. Vấn đề 2 :

XÁC ĐỊNH CÁC THÀNH PHẦN CỦA MỘT CONIC KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA CONIC ĐÓ

Phương pháp :

* Các thành phần của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Trục lớn của (E) nằm trên Ox : $A_1A_2 = 2a$.
- Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy : $B_1B_2 = 2b$.
- Hai tiêu điểm: $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$.
- Bốn đỉnh : $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$

  $B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$.
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a} < 1$.
- Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$; $y = \pm b$.

* Các thành phần của hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Trục thực của (H) nằm trên Ox: $A_1A_2 = 2a$.
- Trục ảo của (H) nằm trên Oy : $B_1B_2 = 2b$.
- Hai tiêu điểm: $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ với $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Hai đỉnh : $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$.
- Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$.
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a} > 1$.
- Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$; $y = \pm b$.
- Phương trình tiệm cận : $y = \pm \frac{b}{a} x$.

* Các thành phần của parabol (P) : $y^2 = 2px$.

- Tiêu điểm : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

– Đường chuẩn Δ : $x = -\frac{p}{2}$.

– Trục đối xứng : $y = 0$ (Ox).

3. Vấn đề 3 :

ĐIỂM M DI ĐỘNG TRÊN MỘT CONIC

Phương pháp :

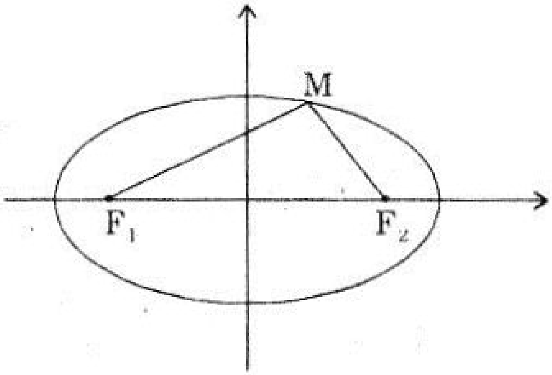
* Để chứng tỏ điểm M di động trên một elip ta có hai cách :

Cách 1 :

Chứng minh tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cố định F_1, F_2 là một hằng số 2a.

$$(E) = \{M / F_1M + F_2M = 2a\} \quad (2a > F_1F_2)$$

Khi đó M di động trên elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 và trục lớn là 2a.

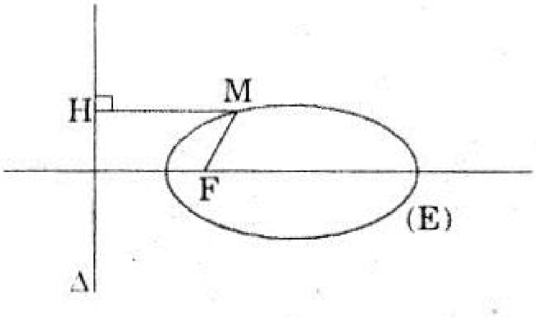


Cách 2 :

Chứng minh tỉ số khoảng cách từ M đến một điểm cố định F và đến một đường thẳng cố định Δ là một hằng số e nhỏ hơn 1.

$$(E) = \left\{M / \frac{MF}{d(M, \Delta)} = e\right\} \quad (e < 1)$$

Khi đó M di động trên elip (E) có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ, tâm sai e.



* Để chứng tỏ điểm M di động trên một hypebol ta có hai cách :

Cách 1 : – Tìm hai điểm cố định F_1, F_2.

– Chứng minh $|MF_1 - MF_2| = 2a \quad (2a < F_1F_2)$

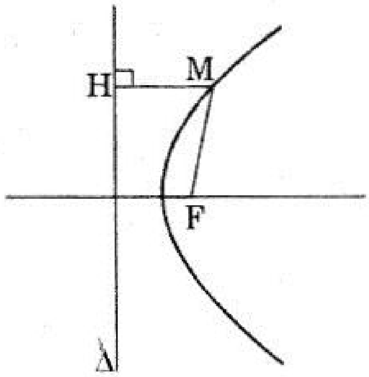
Khi đó M di động trên hypebol (H) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và có trục thực là 2a.

$$(H) = \{M / |F_1M - F_2M| = 2a\}$$

Cách 2 : – Tìm điểm cố định F và đường thẳng Δ cố định ($F \notin \Delta$).

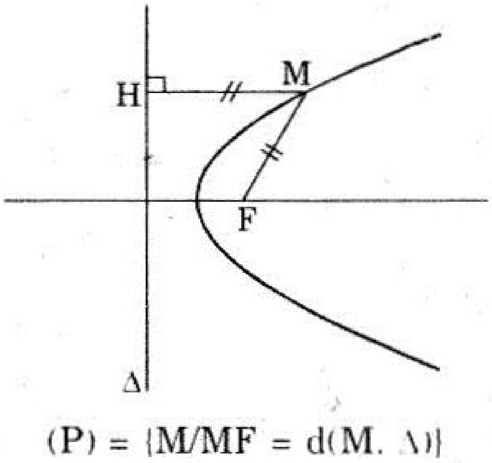
– Chứng minh $\dfrac{MF}{d(M, \Delta)} = e \ (e > 1)$.

Khi đó M di động trên hypebol (H) có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ và tâm sai e.



$$(H) = \left\{M / \frac{MF}{d(M, \Delta)} = e\right\} \quad (e > 1)$$

* Để chứng minh điểm M di động trên một parabol ta chứng minh M cách đều một điểm cố định F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Khi đó M di động trên parabol (P) có tiêu điểm là F và đường chuẩn là Δ.



$$(P) = \{M / MF = d(M, \Delta)\}$$

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Cho $\vec{a} = (1, 2)$; $\vec{b} = (3, 4)$. Tìm tọa độ của vectơ

a) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ **b)** $\vec{n} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

Giải

a) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2(1) + 3(3) \\ m_2 = 2(2) + 3(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 11 \\ m_2 = 16 \end{cases}$

Vậy : $\vec{m} = (11, 16)$.

b) Tương tự ta có : $\vec{n} = (1, 4)$.

Bài 2

Cho tam giác ABC có A(–5, 6) ; B(–4, –1) ; C(4, 3).

a) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc A' của A lên BC.

Giải

a) ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 5 = 4 - x_D \\ -1 - 6 = 3 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 10 \end{cases}$$

Vậy : D(3, 10).

b) Đặt A'(x, y) ta có : $\overrightarrow{AA'} = (x + 5, y - 6)$

$\overrightarrow{BA'} = (x + 4, y + 1)$

$\overrightarrow{BC} = (8, 4)$

A' là hình chiếu của A lên BC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8(x + 5) + 4(y - 6) = 0 \\ 4(x + 4) - 8(y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy : A'(–2, 0).

Bài 3

Cho tam giác ABC với A(10, 5) ; B(3, 2) ; C(6, −5).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

b) Tìm giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với trục Ox.

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-7, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-4, -10)$

$\overrightarrow{BC} = (3, -7)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -21 + 21 = 0$ Vậy : $\widehat{ABC} = 90^0$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I là trung điểm AC.

$$I\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 8 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, 0) \in (\mathscr{C}) \cap Ox &\Leftrightarrow IM = IA \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + 0} = \sqrt{(10-8)^2 + 5^2} \\ &\Leftrightarrow |x - 8| = \sqrt{29} \\ &\Leftrightarrow x = 8 \pm \sqrt{29} \end{aligned}$$

Vậy $(\mathscr{C})$ cắt Ox tại hai điểm $M_1(8 + \sqrt{29}, 0)$; $M_2(8 - \sqrt{29}, 0)$.

Bài 4

Cho tam giác ABC có A(−3, 6) ; B(9, −10) ; C(−5, 4).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G, tâm I vòng ngoại tiếp và trực tâm H của tam giác ABC.

b) Chứng minh I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG.

Giải

a) Ta có : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{-3 + 9 - 5}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{6 - 10 + 4}{3} = 0 \end{cases}$

Vậy trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$I(x, y)$ là tâm vòng ngoại tiếp tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x-9)^2 + (y+10)^2 \\ (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x+5)^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 32y = 136 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy vòng ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(3, -2)$.

Xét điểm $H(x, y)$. Ta có : $\overrightarrow{AH} = (x + 3, y - 6)$

$\overrightarrow{BC} = (-14, 14)$

$\overrightarrow{BH} = (x - 9, y + 10)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, -2)$

H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14(x+3) + 14(y-6) = 0 \\ -2(x-9) - 2(y+10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 9 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC có trực tâm $H(-5, 4)$.

b) Ta có : $\overrightarrow{IH} = (-8, 6)$

$\overrightarrow{IG} = \left(-\frac{8}{3}, 2\right)$

$\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$

$$\Rightarrow \begin{cases} I, G, H \text{ thẳng hàng} \\ \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \end{cases}$$

Bài 5

Cho tam giác ABC có $A(1, -1)$; $B(5, -3)$, đỉnh C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tính tọa độ của C.

Giải

Đặt $C(0, y)$, ta có :

G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1 + 5 + 0}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-1 - 3 + y}{3} = \dfrac{y - 4}{3} \end{cases}$$

$G \in Ox \quad \Leftrightarrow \quad y_G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4$

Vậy ta có $C(0, 4)$.

Bài 6

Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\overrightarrow{a} = (4, 3); \quad \overrightarrow{b} = (1, 7)$ **b)** $\overrightarrow{a} = (2, 5); \quad \overrightarrow{b} = (3, -7)$.

Giải

a) Ta có : $$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} . \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \frac{4 + 21}{\sqrt{16 + 9}\sqrt{1 + 49}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 45^0.$$

b) Ta có : $$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} . \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \frac{6 - 35}{\sqrt{4 + 25}\sqrt{9 + 49}}$$

$$= \frac{-29}{29\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 135^0$.

Bài 7

Chứng tỏ tam giác ABC có một góc tù, cho biết $A(4, 2)$; $B(0, 1)$; $C(6, -1)$.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-4, -1)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -3)$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{AB . AC} = \frac{-6 + 3}{AB . AC} = \frac{-3}{AB . AC} < 0$$

Vậy tam giác ABC có góc A là góc tù.

Bài 8

Lập phương trình **tham số** và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi **trường hợp** sau :

a) Δ đi qua điểm M(2; 1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (3; 4)$.

b) Δ đi qua điểm M(5; –2) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (4; -3)$.

Giải

a) Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4}$.

b) Δ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (4; -3)$ nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (3; 4)$

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ : $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{4}$.

Bài 9

Viết phương trình **tham số** và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi **trường hợp** sau :

a) Δ đi qua điểm M(5; 1) và có hệ số góc k = 3.

b) Δ đi qua hai điểm A(3; 4) và B(4; 2).

Giải

a) Δ có hệ số góc k = 3 nên Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (1; 3)$.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-1}{3}$.

b) Δ đi qua A, B nên Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$.

Bài 10

Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm M(3; 4) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1; 2)$.

b) d đi qua điểm M(3; –2) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (4; 3)$.

Giải

a) Phương trình của d có dạng : (1) $(x-3) + 2(y-4) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y - 11 = 0.$$

b) Phương trình của d có dạng :

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-3) = 4(y+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4y - 17 = 0.$$

Bài 11

Cho tam giác ABC, biết A(1; 4), B(3; –1), C(6; 2). Lập phương trình của đường cao AH và trung tuyến AM.

Giải

AH có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (3; 3)$ hoặc $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (1; 1)$.

Phương trình của AH là :

$$1(x-1) + 1(y-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Tọa độ trung điểm M của BC : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+6}{2} = \dfrac{9}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$.

Trung tuyến AM có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AM} = (1; -1)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1; 1)$. Vậy phương trình của AM là :

$$(x-1) + (y-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Chú ý : Tam giác ABC có đường cao AH trùng với trung tuyến AM nên tam giác ABC cân tại A.

Bài 12

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a) $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ $\qquad d_2 : x + y + 2 = 0$

b) $d_3 : 12x - 6y + 10 = 0$ $\qquad d_4 : 2x - y + 5 = 0$

c) $d_5 : 8x + 10y - 12 = 0$ $\qquad d_6 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ 6 - 4t \end{cases}$.

Giải

a) Ta có $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-10}{1}$. Vậy d_1 cắt d_2.

b) Ta có $\dfrac{12}{2} = \dfrac{-6}{-2} \neq \dfrac{10}{5}$. Vậy $d_3 \,//\, d_4$.

c) Phương trình tổng quát của d_6 là : $\quad d_6 : 4x + 5y - 6 = 0$

$d_5 : 8x + 10y - 12 = 0$

Ta có $\dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{-6}{-12}$. Vậy $d_5 \equiv d_6$.

Bài 13

Cho hai đường thẳng $\quad d_1 : x - 2y + 5 = 0$

$d_2 : 3x - y = 0$

a) Tìm giao điểm của d_1 và d_2. **b)** Tính góc giữa d_1 và d_2.

Giải

a) Giao điểm M(x; y) của d_1 và d_2 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại M(1; 3).

b) $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \dfrac{|3 + 2|}{\sqrt{1 + 4}\,\sqrt{9 + 1}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

Bài 14

Tính khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng tương ứng sau đây :

a) $A(3; 5)$ và $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$

b) $B(1; 2)$ và $\Delta : 3x - 4y + 1 = 0$.

Giải

a) Ta có $$d(A, \Delta) = \frac{|4(3) + 3(5) + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{28}{5}$$

b) $$d(B, \Delta) = \frac{|3(1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}.$$

Bài 15

Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và hai điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$.

a) Chứng tỏ rằng hai điểm A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Tìm điểm O' đối xứng của O qua Δ.

c) Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất.

Giải

a) Ta có $\Delta(A) = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$

$\Delta(O) = 0 + 0 + 2 = 2 > 0$

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b) Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ tại H. Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$.

Ta có $H(t; -1) \in d$

$H \in \Delta \Rightarrow (t) - (-t) + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$

Vậy $H(-1; 1)$.

H là trung điểm của OO', suy ra $\begin{cases} x'_0 = 2x_H = -2 \\ y'_0 = 2y_H = 2 \end{cases}$

Vậy $O'(-2; 2)$.

c) Ta có $OM + MA = O'M + MA$

Độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất $\Leftrightarrow$ O', M' A thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ O'A cắt Δ tại M.

Phương trình đường O'A : $2x + 4y - 4 = 0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $M(-1; 1)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Bài 16

Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn. Tìm tâm và bán kính nếu có :

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$ (1)

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (2)

c) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$ (3).

Giải

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với $a = 3$; $b = -4$; $c = 100$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - 100 < 0$

Vậy (1) không phải là phương trình của đường tròn.

b) (2) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Với $a = -2$; $b = 3$; $c = -12$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 + 12 = 25 > 0$

Vậy (2) là phương trình của đường tròn tâm $I(-2; 3)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = 5$.

c) Ta có : (3) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6$

$\Leftrightarrow$ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2$

Vậy (3) là phương trình của đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{6}$.

Bài 17

Cho phương trình : $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của đường tròn.

b) Với điều kiện ở câu a, hãy tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn theo m.

Giải

a) (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Với $a = m$; $b = -2m$; $c = 6m - 1$

(1) là phương trình của đường tròn $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 - c > 0$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1}{5} \\ m > 1 \end{array}\right.$$

b) Nếu có điều kiện : $m < \dfrac{1}{5} \vee m > 1$ thì (1) là phương trình của đường tròn tâm $I(m\ ;\ -2m)$ và có bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 6m + 1}$.

Bài 18

Lập phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ trong các trường hợp sau :

a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với $\Delta : x - 2y + 7 = 0$.

b) $(\mathscr{C})$ có đường kính là A, B với $A(1; 1)$, $B(7; 5)$.

Giải

a) Ta có $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|-1 - 4 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{2}{5}$

Vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ là : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{4}{25}$.

b) Tâm I của $(\mathscr{C})$ là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + 7}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1 + 5}{2} = 3 \end{cases}$$

$(\mathscr{C})$ có bán kính $R = IA = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$.

Vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ là :

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13.$$

Bài 19

Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A(1; 2), B(5; 2), C(1; −3).

Giải

Xét đường tròn $(\mathscr{C})$ có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$$(\mathscr{C}) \text{ đi qua A, B, C} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4 - 2a - 4b + c = 0 \\ 25 + 4 - 10a - 4b + c = 0 \\ 1 + 9 - 2a + 6b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - c = 5 \\ 10a + 4b - c = 29 \\ 2a - 6b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là :

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$$

Bài 20

Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C})$:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \quad \text{tại điểm } M_0(4; 2).$$

Giải

$(\mathscr{C})$ có tâm I(1; −2). Vậy phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại $M_0(4; 2)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-1)(x-4) + (2+2)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0.$$

Bài 21

Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C})$:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(3; −2).

Giải

Phương trình của đường thẳng Δ đi qua **A**(3; −2) có dạng :

$$y + 2 = k(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad kx - y - 2 - 3k = 0$$

($\mathscr{C}$) có tâm I(2; 1) và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4 + 1 - 0} = \sqrt{5}$.

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \quad d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|2k - 1 - 2 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad (3 + k)^2 = 5(k^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4k^2 - 6k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với ($\mathscr{C}$) kẻ từ A : $\Delta_1 : \quad 2x - y - 8 = 0$

$\Delta_2 : \quad x + 2y + 1 = 0.$

Bài 22

Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn ($\mathscr{C}$) :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$$

biết rằng Δ song song với đường thẳng d : 3x − y + 2003 = 0.

Giải

($\mathscr{C}$) có tâm I(2; −3) và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Phương trình của đường thẳng Δ song song với d có dạng :

$$\Delta : 3x - y + c = 0$$

Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \quad d(I, \Delta) = R \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|6 + 3 + c|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \quad |c + 9| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -19 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình của Δ là :

$$3x - y + 1 = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - y - 19 = 0.$$

Bài 23

Lập phương trình chính tắc của elip **(E)** trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}\,;0)$ và điểm $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip.

Giải

a) Ta có $2a = 10$ suy ra $a = 5$, $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

b) Phương trình chính tắc của (E) có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(E) có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\,;0)$ suy ra $c = \sqrt{3}$.

$$M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3 \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được :

$$\frac{1}{b^2+3} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3(b^2+3) = 4b^2(b^2+3)$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1$$

Từ (2) suy ra $a^2 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Bài 24

Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục thực là 8 và tiêu cự bằng 10.

b) Tiêu cự bằng 20 và một tiệm cận có phương trình : $4x - 3y = 0$.

Giải

Phương trình chính tắc của (H) có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Ta có $\begin{cases} 2a = 8 \\ 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 5 \end{cases}$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

Vậy phương trình chính tắc của hyperbol (H) là : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b) (H) có tiệm cận $y = \frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$.

Ta có $2c = 20 \Rightarrow c = 10$

Giải hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ b = \frac{4a}{3} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của hyperbol (H) là : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Bài 25

Lập phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau

a) (P) có tiêu điểm là F(2; 0).

b) (P) có đường chuẩn là $x = -3$.

Giải

Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px$.

a) Tọa độ tiêu điểm của (P) là F(2; 0).

Suy ra $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$

Vậy phương trình chính tắc của (P) là : $y^2 = 8x$.

b) (P) có đường chuẩn là $x = -3$.

Suy ra $\frac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$

Vậy phương trình chính tắc của (P) là : $y^2 = 12x$.

Bài 26

Xác định độ dài các trục, tọa độ tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và vẽ elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

Phương trình (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

Vậy (E) có : – Trục lớn $A_1A_2 = 2a = 10$

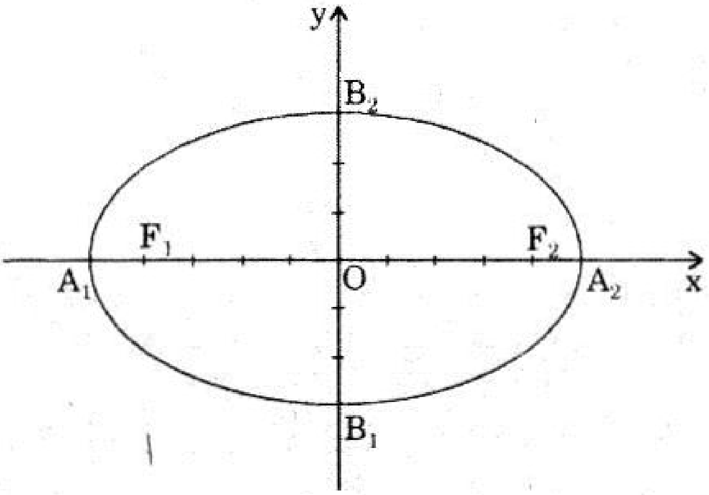
– Trục nhỏ $B_1B_2 = 2b = 6$

– Hai tiêu điểm : $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$

– Bốn đỉnh : $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$

$B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

Hình vẽ của (E) :



Bài 27

Tìm độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, phương trình các tiệm cận và vẽ hyperbol (H) :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Giải

Phương trình (H) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

Vậy (H) có : – Trục thực $A_1A_2 = 2a = 8$

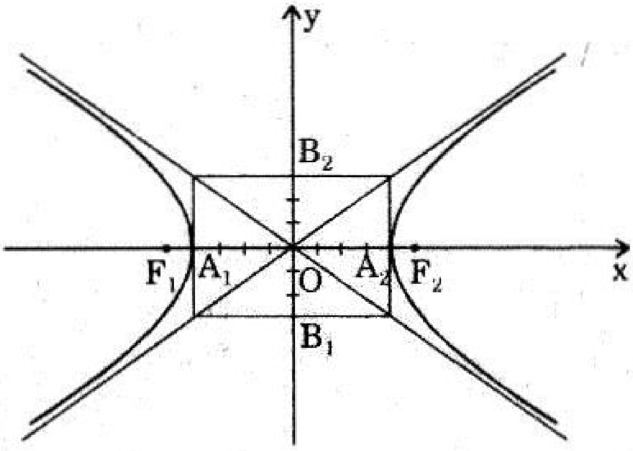
– Trục ảo $B_1B_2 = 2b = 6$

– Hai tiêu điểm : $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$

– Hai đỉnh : $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$

– Phương trình hai tiệm cận : $y = \pm\frac{3}{4}x$

Hình vẽ của (H) :



Bài 28

Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol sau

a) $y^2 = 8x$ (P_1) **b)** $y^2 + 4x = 0$ (P_2).

Giải

a) (P_1) : $y^2 = 8x$

(P_1) có dạng $y^2 = 2px$.

Ta có $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

Vậy (P_1) có tiêu điểm $F(2; 0)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -2$.

b) (P_2) : $y^2 = -4x$

(P_2) có dạng $y^2 = -2px$

Ta có $2p = 4 \Rightarrow p = 2$

Vậy (P_2) có tiêu điểm $F(-1; 0)$ và đường chuẩn $\Delta : x = 1$.

Bài 29

Cho hai đường tròn $C_1(F_1, R_1)$ và $C_2(F_2, R_2)$. C_1 chứa trong C_2 và $F_1 \neq F_2$. Gọi M là tâm của đường tròn (C) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc ngoài với C_1 và tiếp xúc trong với C_2.

Hãy chứng tỏ M di động trên một elip.

Giải

Ta có $\begin{cases} MF_1 = R + R_1 \\ MF_2 = R_2 - R \end{cases}$

Suy ra $\quad MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$

Vậy M di động trên elip (E) có tiêu điểm là F_1, F_2 và có trục lớn là

$$2a = R_1 + R_2.$$

Bài 30

Cho một điểm A cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua A. M là một điểm di động sao cho với mọi m dương, đường tròn C(M, m) luôn tiếp xúc với Δ và đường tròn C'(M, 2m) luôn đi qua A.

Hãy chứng tỏ M di động trên một hyperbol.

Giải

Ta có $\begin{cases} MA = 2m \\ d(M, \Delta) = m \end{cases}$

Suy ra $\quad \dfrac{MA}{d(M, \Delta)} = 2 > 1$.

Vậy điểm M di động trên hyperbol (H) có tiêu điểm A, đường chuẩn Δ và tâm sai e = 2.

Bài 31

Cho một điểm A cố định và một đường thẳng d cố định và không đi qua A. Xét các đường tròn (C) thay đổi có tâm M, biết rằng (C) luôn đi qua A và (C) luôn tiếp xúc với d.

Hãy chứng tỏ M di động trên một parabol.

Giải

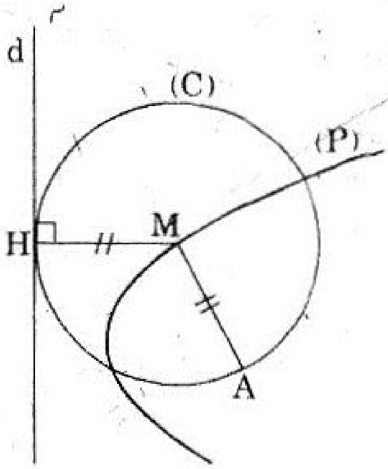
Ta có :

(C) tiếp xúc với d $\Leftrightarrow$ d(M, d) = R

(C) đi qua A $\Leftrightarrow$ MA = R

Suy ra d(M, d) = MA.

Vậy M di động trên parabol (P) có tiêu điểm là A và có đường chuẩn là d.



C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Trong hệ trục tọa độ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ cho các vectơ sau :

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}\ ;\ \vec{b} = 2\vec{j}$$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $\vec{a} = (4, -3)$ B. $\vec{b} = (0, 2)$

C. $|\vec{a}| = 5$ D. $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

2. Cho hai vectơ : $\vec{a} = (2, -4)$ và $\vec{b} = (-5, 3)$

Tìm tọa độ của vectơ : $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

A. $\vec{u} = (7, -7)$ B. $\vec{u} = (9, -11)$

C. $\vec{u} = (9, 5)$ D. $\vec{u} = (-1, 5)$.

3. Cho ba điểm A(–1, 1) ; B(1, 3) ; C(–2, 0). Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ B. A, B, C thẳng hàng

C. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

4. Cho tam giác ABC với A(4, 0) ; B(2, 3) ; C(9, 6). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. (3, 5) B. (5, 3) C. (15, 9) D. (9, 15).

5. Cho 3 điểm A(1, 4) ; B(3, 2) ; C(5, 4). Chu vi tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

A. $4 + 2\sqrt{2}$ B. $4 + 4\sqrt{2}$ C. $8 + 8\sqrt{2}$ D. $2 + 2\sqrt{2}$.

6. Cho 3 điểm A(1, 4) ; B(3, 2) ; C(5, 4). Tìm tọa độ tâm I vòng ngoại tiếp tam giác ABC.

A. I(3, 4) B. $I\left(3, \frac{10}{3}\right)$ C. $I\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ D. I(9, 10).

7. Cho ba điểm A(1, 1) ; B(3, 2) ; C(6, 5). Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

A. D(4, 3) B. D(3, 4) C. D(4, 4) D. D(8, 6).

8. Cho hai điểm A(1, 2) ; B(3, 4). Tọa độ của một vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là :

A. (1, 1) B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9. Cho các điểm A(−1, 1) ; B(1, 3) ; C(1, −1). Chọn câu trả lời đúng và đầy đủ nhất :

A. Tam giác ABC đều B. Tam giác ABC vuông

C. Tam giác ABC vuông cân D. Tam giác ABC cân.

10. Cho các điểm A(−1, 1) ; B(0, 2) ; C(3, 1) ; D(0, −2). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. AB // DC B. AC = BD C. AD = BC D. AD // BC.

11. Cho bốn điểm A(2, 1) ; B(2, −1) ; C(−2, −3) ; D(−2, −1). Xét 3 mệnh đề :

(I) ABCD là hình thoi

(II) ABCD là hình bình hành

(III) AC cắt BD tại M(0, −1).

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

A. Chỉ (I) đúng B. Chỉ (II) đúng

C. Chỉ (II) và (III) đúng D. Cả 3 đều đúng.

12. Cho ba điểm A(3, 5) ; B(2, 3) ; C(6, 2). Tìm tọa độ tâm I vòng ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\left(\frac{25}{6}, \frac{19}{6}\right)$ B. $(-25, -19)$ C. $\left(\frac{25}{3}, \frac{19}{3}\right)$ D. $(25, 19)$.

§2. ĐƯỜNG THẲNG

1. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là A(1; 2), B(3; 1), C(5; 4). Phương trình đường cao vẽ từ A là :

A. $2x + 3y - 8 = 0$ B. $3x - 2y - 5 = 0$

C. $5x - 6y + 7 = 0$ D. $3x - 2y + 5 = 0$.

2. Cho tam giác ABC với A(−1; 1), B(4; 7), C(3; −2). Phương trình tham số của trung tuyến CM là :

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$.

3. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng d : $3x - 4y + 12 = 0$ và cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho AB = 5. Ta được kết quả là :

A. $3x - 4y + 12 = 0$ B. $6x - 8y - 12 = 0$

C. $3x - 4y - 12 = 0$ D. $3x - 4y - 6 = 0$.

4. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng d : $x + 2y - 4 = 0$ và hợp với hai trục tọa độ thành một tam giác có diện tích bằng 1 ?

A. $2x + y + 2 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$

C. $x - 2y + 2 = 0$ D. $2x - y + 2 = 0$.

5. Cho phương trình tham số của đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}$.

Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình tổng quát của (d) ?

A. $2x + y - 1 = 0$ B. $2x + y + 1 = 0$

C. $x + 2y + 2 = 0$ D. $x + 2y - 2 = 0$.

6. Đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) và vuông góc với vectơ $\overrightarrow{n} = (2; 3)$ có phương trình chính tắc là :

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$ B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3}$ D. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2}$.

7. Đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) và song song với đường thẳng (d) : $4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là :

A. $4x + 2y + 3 = 0$ B. $2x + y + 4 = 0$

C. $2x + y - 4 = 0$ D. $x - 2y + 3 = 0$.

8. Đường thẳng đi qua điểm N(−2; 1) và có hệ số góc là $k = \frac{2}{3}$ có phương trình tổng quát là :

A. $2x - 3y + 7 = 0$ B. $2x - 3y - 7 = 0$

C. $2x + 3y + 1 = 0$ D. $3x - 2y + 8 = 0$.

9. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát : $3x + 5y + 2003 = 0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (3; 5)$

B. d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (5; -3)$

C. d có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$

D. d song song với đường thẳng $3x + 4y = 0$.

10. Cho hai điểm A(1; −2), B(3; 6). Phương trình đường trung trực của đoạn AB là :

A. $x + 4y - 10 = 0$ B. $2x + 8y - 5 = 0$

C. $x + 4y + 10 = 0$ D. $2x + 8y + 5 = 0$.

11. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm M(1; 4) xuống đường thẳng d : $x - 2y + 2 = 0$.

A. H(3; 0) B. H(0; 3) C. H(2; 2) D. H(2; −2).

12. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M(1; 4) qua đường thẳng d :

$x - 2y + 2 = 0$.

A. $M'(0; 3)$ B. $M'(2; 2)$ C. $M'(4; 4)$ D. $M'(3; 0)$.

13. Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng :

$$d_1 : x + 3y - 1 = 0 \ ; \quad d_2 : x - 3y - 5 = 0$$

và vuông góc với đường thẳng $d_3 : 2x - y + 7 = 0$.

A. $3x + 6y - 5 = 0$ B. $6x + 12y - 5 = 0$

C. $6x + 12y + 10 = 0$ D. $x + 2y + 10 = 0$.

14. Tính khoảng cách từ điểm $M(-2; 2)$ đến đường thẳng

$$\Delta : 5x - 12y - 10 = 0.$$

A. $\frac{24}{13}$ B. $\frac{44}{13}$ C. $\frac{44}{169}$ D. $\frac{14}{169}$.

15. Tính bán kính của đường tròn tâm $I(1; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 26 = 0$.

A. 15 B. 5 C. $\frac{3}{5}$ D. 3.

16. Cho hai đường thẳng $d_1 : 4x - my + 4 - m = 0$

$d_2 : (2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$

với giá trị nào của m thì d_1 song song với d_2.

A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = 2$

D. $m = -1$ hay $m = 2$.

17. Tính góc nhọn giữa hai đường thẳng : $d_1 : x + 2y + 4 = 0$

$d_2 : x - 3y + 6 = 0$.

A. 30^0 B. 60^0 C. 45^0 D. $23''12'$.

18. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : x + 5y + 11 = 0$

$\Delta_2 : 2x + 9y + 7 = 0$.

A. 45^0 B. 30^0 C. $88^0 57' 52''$ D. $1^0 13' 8''$.

19. Lập phương trình đường phân giác của góc nhọn giữa hai đường thẳng :

$$d_1 : x + 3y - 6 = 0 \ ; \quad d_2 : 3x + y + 2 = 0.$$

A. $x + y - 1 = 0$ B. $x - y + 4 = 0$

C. $x - y + 1 = 0$ D. $x + y + 1 = 0$.

20. Tính khoảng cách từ điểm M(0; 3) đến đường thẳng

$$\Delta : x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2 - \sin\alpha) = 0.$$

A. $\sqrt{6}$ B. 6 C. $3\sin\alpha$ D. $\dfrac{3}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

§3. ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn :

A. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$

B. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

2. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. (C) có tâm I(1; 2) B. (C) có bán kính R = 5

C. (C) đi qua điểm M(2; 2) D. (C) không đi qua điểm A(1; 1)

3. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm M(3; 4) với đường tròn

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0.$$

A. $x + y - 7 = 0$ B. $x + y + 7 = 0$

C. $x - y - 7 = 0$ D. $x + y - 3 = 0$.

4. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

và đường thẳng (Δ) : $x + 2y + 1 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng.

A. (Δ) đi qua tâm của (C) B. (Δ) cắt (C) tại hai điểm

C. (Δ) tiếp xúc (C) D. (Δ) không có điểm chung với (C).

5. Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ ta được :

A. $I(-1; 1)$, $R = 1$ B. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $I(1; -1)$, $R = \sqrt{6}$.

6. Cho ba điểm $A(3; 5)$, $B(2; 3)$, $C(6; 2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là :

A. $x^2 + y^2 - 25x - 19y + 68 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 25x + 19y - 68 = 0$

C. $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$

D. $x^2 + y^2 + \frac{25}{3}x + \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$.

7. Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng.

A. (C_1) cắt (C_2)

B. (C_1) không có điểm chung với (C_2)

C. (C_1) tiếp xúc trong với (C_2)

D. (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

8. Tìm tiếp điểm của đường thẳng $d : x + 2y - 5 = 0$ với đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

A. $(3; 1)$ B. $(6; 4)$ C. $(5; 0)$ D. $(1; 2)$.

9. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây là phương trình của đường tròn : $x^2 + y^2 - 2(m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$.

A. $1 < m < 2$ B. $-2 \le m \le 1$

C. $m < 1$ hay $m > 2$ D. $m < -2$ hay $m > 1$.

10. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta : mx + y + 2 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

A. $m = \frac{8}{15}$ B. $m = \frac{15}{8}$ C. $m = -\frac{8}{15}$ D. $m = 0$.

11. Cho hai điểm A(1; 1), B(7; 5).

Phương trình đường tròn đường kính AB là :

A. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 12 = 0$.

12. Đường tròn đi qua ba điểm A(−2; 4), B(5; 5), C(6; 2) có phương trình là :

A. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 20 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 2x - y + 10 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

§4. BA ĐƯỜNG CONIC

1. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và cho các mệnh đề :

(I) (E) có tiêu điểm $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$

(II) (E) có tâm sai $e = \frac{4}{5}$

(III) (E) có đỉnh $A_1(-5; 0)$

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào sai ?

A. I và II B. II và III C. I và III D. IV và I.

2. Lập phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là (−3; 0), (3; 0) và hai tiêu điểm là (−1; 0), (1; 0) ta được :

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3. Cho elip (E) : $x^2 + 4y^2 = 1$ và cho các mệnh đề :

(I) (E) có trục lớn bằng 1

(II) (E) có trục nhỏ bằng 4

(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Trong các mệnh đề trên, tìm mệnh đề đúng ?

A. (I) B. (II) và (IV) C. (I) và (III) D. (IV).

4. Dây cung của elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là :

A. $\dfrac{2c^2}{a}$ B. $\dfrac{2b^2}{a}$ C. $\dfrac{2a^2}{c}$ D. $\dfrac{a^2}{c}$.

5. Một elip có trục lớn bằng 26, tâm sai $e = \dfrac{12}{13}$. Trục nhỏ của elip bằng bao nhiêu ?

A. 5 B. 10 C. 12 D. 24.

6. Cho hyperbol (H) : $9x^2 - 16y^2 = 144$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. (H) có trục thực bằng 8 B. (H) có trục ảo bằng 6

C. (H) có tiêu cự bằng 10

D. (H) có tiệm cận là hai đường : $y = \pm \dfrac{4}{3}x$.

7. Cho hyperbol (H) : $x^2 - y^2 = 4$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. (H) có tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B. Tiêu điểm của (H) nằm trên Oy

C. Hai tiệm cận của (H) vuông góc

D. Khoảng cách giữa hai đỉnh của (H) bằng $2\sqrt{2}$.

8. Cho hyperbol (H) có trục thực bằng 8, tâm sai $e = \frac{5}{2}$, tiêu điểm trên Ox. Phương trình chính tắc của (H) là :

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$ B. $\frac{x^2}{84} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{84} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{100} = 1$.

9. Cho hyperbol (H) đi qua điểm $A\left(\frac{9}{2}; \sqrt{5}\right)$ và có phương trình hai tiệm cận là $2x \pm 3y = 0$. Phương trình chính tắc của (H) là :

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{4} = 1$.

10. Cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{99} - \frac{y^2}{33} = 1$. Tính góc giữa hai đường tiệm cận :

A. 90^0 B. 30^0 C. 60^0 D. 45^0.

11. Cho parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ và nhận F(2; 0) là tiêu điểm. Phương trình của (P) là :

A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 4x$.

12. Cho parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ và nhận (Δ) : x = 4 là đường chuẩn. Phương trình của (P) là :

A. $y^2 = -16x$ B. $y^2 = 16x$ C. $x^2 = 8y$ D. $x^2 = -8y$.

13. Cho parabol (P) : $y^2 = 36x$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. (P) có tiêu điểm là F(9; 0)

B. (P) có đường chuẩn là (Δ) : $x = -9$

C. (P) có tham số tiêu là 36

D. (P) có tâm sai $e = 1$.

14. Cho parabol (P) : $x^2 - 4y = 0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. (P) có tâm sai $e = -1$

B. (P) có tiêu điểm F(1; 0)

C. (P) có đường chuẩn $\Delta : x = -1$

D. (P) có tham số tiêu là .

15. Bốn parabol sau đây có cùng đặc điểm gì ?

(1) $y^2 = 8x$
(2) $y^2 = -4x$
(3) $x^2 = 2y$
(4) $x^2 = -6y$

A. Tiêu điểm
B. Trục đối xứng
C. Đường chuẩn
D. Tâm sai.

PHẦN II - ĐẠI SỐ

Chương I

TẬP HỢP - MỆNH ĐỀ

A. LÍ THUYẾT

§1. *Mệnh đề*

1. Khái niệm mệnh đề

Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một phát biểu khẳng định một sự kiện nào đó sao cho khẳng định đó phải thỏa hai điều kiện :

a) Hoặc đúng, hoặc sai.

b) Không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ :

"Hôm nay trời có mưa không ?" không phải là một mệnh đề.

"Hôm qua trời nắng" là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu hôm qua trời thực sự nắng và sai nếu hôm qua trời thực sự không nắng.

2. Các phép toán trên mệnh đề :

2.1 Phép phủ định :

Cho mệnh đề A. Phủ định của mệnh đề A, kí hiệu $\overline{A}$, đọc là "không A", là mệnh đề đúng nếu A sai và sai nếu A đúng

A	$\overline{A}$
Đ	S
S	Đ

2.2 Phép giao :

Cho hai mệnh đề A và B. Giao của hai mệnh đề A và B, kí hiệu $A \wedge B$, là mệnh đề chỉ đúng khi cả A và B đều đúng.

A	B	$A \wedge B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

2.3 Phép hội :

Cho hai mệnh đề A và B. Hội của hai mệnh đề A và B, kí hiệu $A \vee B$, là mệnh đề chỉ sai khi cả A và B đều sai.

A	B	$A \vee B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

2.4 Phép kéo theo :

Cho hai mệnh đề A và B. Mệnh đề "nếu A thì B" được gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu $A \Rightarrow B$, là mệnh đề chỉ sai nếu A đúng và B sai.

A	B	$A \Rightarrow B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

2.5 Phép tương đương :

Cho hai mệnh đề A và B. Mệnh đề "A khi và chỉ khi B", hay "A tương đương với B", kí hiệu $A \Leftrightarrow B$, là mệnh đề chỉ đúng khi A và B cùng tính đúng sai.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

3. Mệnh đề chứa các kí hiệu ∀, ∃ :

3.1 Mệnh đề chứa biến :

Mệnh đề chứa biến là phát biểu có chứa một hay một số biến lấy giá trị trong các tập hợp đã cho. Bản thân các phát biểu này chưa là mệnh đề, nhưng nếu cho các biến những giá trị cụ thể thì được mệnh đề. Nếu hai mệnh đề P và Q đúng với mọi giá trị của biến, ta kí hiệu P = Q, lúc đó ta nói P = Q là mệnh đề hằng đúng.

Các phương trình, các bất phương trình chính là các mệnh đề chứa biến.

3.2 Kí hiệu phổ biến (∀) và kí hiệu tồn tại (∃) :

Kí hiệu ∀, đọc là kí hiệu phổ biến, có nghĩa là với mọi, thường được gắn vào các biến trong mệnh đề chứa biến thuộc dạng :

$\forall x \in X, P(x)$ (với mọi x thuộc X, x có tính chất P)

Ví dụ : "$\forall n \in N$, n là số nguyên tố"

Kí hiệu ∃, đọc là kí hiệu tồn tại, có nghĩa là có ít nhất một, tồn tại một, thường được gắn vào các biến trong mệnh đề chứa biến thuộc dạng :

$\exists x \in X, P(x)$ (có x thuộc X, x có tính chất P)

Ví dụ : "$\exists n \in N$, n là số nguyên tố".

3.3 Phủ định của các mệnh đề chứa các kí hiệu ∀, ∃ :

a) Phủ định của mệnh đề

"$\forall x \in X$, x có tính chất P"

là mệnh đề

"$\exists x \in X$, x không có tính chất P"

b) Phủ định của mệnh đề

"$\exists x \in X$, x có tính chất P"

là mệnh đề

"$\forall x \in X$, x không có tính chất P"

4. Phương pháp giải toán

a) Dựa vào định nghĩa các phép toán phủ định, giao, hội, kéo theo, tương đương và giả thiết của bài toán để xét chân trị các mệnh đề.

b) Lập bảng chân trị để chứng minh mệnh đề hằng đúng.

Chú ý : nếu bảng chân trị có N biến thì số trường hợp cần lập là 2^N.

c) Để chứng minh mệnh đề "$\forall x \in X$, x có tính chất P" là sai, ta có thể chứng minh mệnh đề phủ định của nó là đúng, nói cách khác, ta chỉ cần chứng minh có $x_0 \in X$ sao cho tính chất P là sai.

5. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học

5.1. Định lí. Điều kiện cần. Điều kiện đủ :

5.1.1. Phần lớn các định lí toán học là những mệnh đề đúng có dạng :

$$A \Rightarrow B \qquad (1)$$

A gọi là giả thiết, B gọi là kết luận của định lí.

Chứng minh định lí $A \Rightarrow B$ là đúng nghĩa là chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng.

5.1.2. Trong định lí (1), nếu A đúng thì B đúng. Người ta nói A là điều kiện đủ để có B.

Trong định lí (1), nếu B sai thì A sai. Người ta nói B là điều kiện cần để có A.

5.2. Định lí đảo. Điều kiện cần và đủ :

5.2.1. Giả sử ta có định lí :

$$A \Rightarrow B \qquad (1)$$

Xét mệnh đề :

$$B \Rightarrow A \qquad (2)$$

(2) gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề (1).

Nếu mệnh đề đảo (2) là đúng, ta có một định lí, và ta nói (2) là định lí đảo của định lí (1).

5.2.2. Nếu đồng thời có hai định lí thuận (1) và định lí đảo (2) thì có mệnh đề đúng :

$$A \Leftrightarrow B$$

Lúc đó, ta nói A là điều kiện cần và đủ để có B và ta cũng nói B là điều kiện cần và đủ để có A.

5.3. Phép chứng minh phản chứng :

Để chứng minh định lí :

$$A \Rightarrow B \qquad (1)$$

ta có thể chứng minh A đúng suy ra B đúng.

Ta cũng có thể chứng minh : "B sai suy ra A sai". Do A không thể đồng thời vừa đúng vừa sai, ta suy ra B phải đúng.

Cách chứng minh vừa nói gọi là cách chứng minh phản chứng.

5.4. Phương pháp giải toán

1. Phép chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng gồm các bước :

   a) Giả thiết mệnh đề A là đúng.

   b) Dùng suy luận và các kiến thức toán học đã biết, chứng minh B là đúng.

   c) Kết luận mệnh đề $A \Rightarrow B$ là đúng

2. Sử dụng điều kiện cần có thể giúp chúng ta giới hạn không gian tìm kiếm của lời giải bài toán.

§2. Tập hợp

1. Khái niệm tập hợp :

1.1 Tập hợp :

Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học. Một tập hợp là một gom góp các đối tượng mà ta gọi là phần tử của tập hợp tương ứng.

Nếu a là phần tử của tập hợp X, ta viết : $a \in X$.

Nếu a không là phần tử của tập hợp X, ta viết : $a \notin X$.

1.2 Các cách xác định tập hợp :

a) Liệt kê các phần tử của nó :

Ví dụ : $A = \{1,2,3,4,6,12\}$

b) Nêu tính chất đặc trưng :

Ví dụ : $B = \{x \in R \ / \ 0 < x < 1\}$.

1.3. Tập rỗng :

Tập không có phần tử gọi là tập rỗng, kí hiệu : $\varnothing$.

2. Tập con :

2.1 Định nghĩa :

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều thuộc tập hợp B, ta nói A là tập con của B, kí hiệu $A \subset B$ (đọc là : A chứa trong

B hay chứa A).

Vậy : $A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B\}$

Nếu A không phải là tập con của B, ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là : A không chứa trong B)

Vậy : $A \not\subset B \Leftrightarrow \{\exists x_0, x_0 \in A$ và $x_0 \notin B\}$

2.2 *Tính chất :*

a) $A \subset A$ với mọi tập hợp A.

b) $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Ngoài ra, người ta quy ước $\varnothing \subset A$, với mọi tập hợp A.

2.3 *Một số tập con đặc biệt của R :*

Ngoài các tập con quen thuộc của R như N, Z, Q, trong R ta thường dùng một số tập con sau :

- $(a ; b) = \{x \in R / a < x < b\}$ $[a ; b] = \{x \in R / a \le x \le b\}$
- $(a ; b] = \{x \in R / a < x \le b\}$ $[a ; b) = \{x \in R / a \le x < b\}$
- $(-\infty ; a) = \{x \in R / x < a\}$ $(a ; \infty) = \{x \in R / x > a\}$
- $(-\infty ; a) = \{x \in / x \le a\}$ $[a ; \infty) = \{x \in R / x \ge a\}$

3. Tập hợp bằng nhau :

Định nghĩa :

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mỗi phần tử của A đều thuộc B và mỗi phần tử của B đều thuộc A, ta nói tập hợp A và B là bằng nhau và kí hiệu là : A = B.

Vậy : $A = B \Leftrightarrow \{\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B\} \Leftrightarrow \{A \subset B$ và $B \subset B\}$

4. Các phép toán về tập hợp :

4.1. *Giao của hai tập hợp :*

4.1.1. *Định nghĩa :*

Giao của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc A và B, kí hiệu là $A \cap B$.

Vậy : $A \cap B = \{x / x \in A$ và $x \in B\}$

Ví dụ : $A = \{1, 3, 4\}$ và $B = \{3, 5, 7, 9\}$ thì $B = \{3, 5\}$.

4.1.2. *Tính chất :*

$$A \cap A = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

4.2. Hợp của hai tập hợp :

4.2.1 *Định nghĩa* :

Hợp của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc A hay thuộc B, kí hiệu là $A \cup B$.

Vậy : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ hay } x \in B\}$

Ví dụ : $A = \{1, 3, 4\}$ và $B = \{3, 5, 7, 9\}$ thì $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

4.2.2 *Tính chất* :

$$A \cup A = A; \quad A \cup \varnothing = A.$$

4.3. Hiệu của hai tập hợp :

4.3.1 *Định nghĩa* :

Hiệu của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc A và không thuộc B, kí hiệu là $A \setminus B$.

Vậy : $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}$

Ví dụ : $A = \{1, 3, 4\}$ và $B = \{3, 5, 7, 9\}$ thì $A \setminus B = \{1, 4\}$.

4.3.2 *Phần bù* :

Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A.

§3. Các phép toán về tập hợp

1. Phép giao :

Cho hai tập hợp A và B. Giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$, là một tập hợp các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

$$\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B}$$

2. Phép hợp :

Cho hai tập hợp A và B. Hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$, là tập hợp các phần tử thuộc A hay thuộc B.

$$\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \text{ hay } x \in B\}}$$

3. Phép hiệu :

Cho hai tập hợp A và B. Hiệu của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \setminus B$, là tập hợp các phần tử thuộc của A và không thuộc B.

$$\boxed{A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}}$$

- Đặc biệt khi $B \subset A$ thì phần hiệu $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A.

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Phủ định các mệnh đề sau :

a) "$3 > \pi$"

b) "2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$".

Giải

a) Phủ định của mệnh đề "$3 > \pi$" là mệnh đề "$3 \leq \pi$".

b) Phủ định của mệnh đề "2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$" là mệnh đề "2 không là nghiệm phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$".

Bài 2

Các mệnh đề sau đúng hay sai :

a) "$\sqrt{2}$ là số nguyên" $\wedge$ "$3 + 4 > 5$"

b) "Nếu $4 > 3$ thì $\sqrt{2} < 1$"

c) "Nếu tam giác ABC cân thì tam giác ABC có ít nhất hai góc nhọn"

d) "5 chia hết 11" $\Leftrightarrow$ "π là số hữu tỉ"

e) "$\forall n \in N$, $n^2 + n$ là số chẵn"

f) "$\forall x$, $x^2 - 4 + 3 \geq 0$".

Giải

a) Mệnh đề "$\sqrt{2}$ là số nguyên" là sai nên mệnh đề "$\sqrt{2}$ là số nguyên" $\wedge$ "$3 + 4 > 5$" sai.

b) Mệnh đề "$4 > 3$" là đúng và mệnh đề "$\sqrt{2} < 1$" nên mệnh đề "Nếu $4 > 3$ thì $\sqrt{2} < 1$" sai.

c) Nhận xét : mệnh đề "$P \Rightarrow Q$" chỉ sai khi P đúng và Q sai, do đó nếu Q đúng thì mệnh đề "$P \Rightarrow Q$" đúng.

Do mệnh đề "tam giác ABC có ít nhất hai góc nhọn" luôn đúng nên mệnh đề "Nếu tam giác ABC cân thì tam giác ABC có ít nhất hai góc nhọn" đúng.

d) Mệnh đề "chia hết 11" là sai, mệnh đề "π là số hữu tỉ" sai, nên mệnh đề "5 chia hết 11" $\Leftrightarrow$ "π là số hữu tỉ" đúng

e) Do : n là số chẵn $\Leftrightarrow$ n^2 là số chẵn nên mệnh đề "$\forall n \in N$, $n^2 + n$ là số chẵn" là đúng.

f) Với $x = 2$ thì $x^2 - 4x + 3 = -1 < 0$ nên mệnh đề "$\forall x, x^2 - 4x + 3 \geq 0$" là sai.

Bài 3

Tìm x để các mệnh đề chứa biến sau đúng :

a) "$x > 2$" $\vee$ "$x < 3$"

b) "$x^2 = 9$" $\Rightarrow$ "$x = 3$"

c) "x là số nguyên dương và $x^2 < 6$"

d) "x là số nguyên tố nhỏ hơn 10"

e) "x là số thực thỏa $x^2 - 3x + 2 = 0$".

Giải

a) Do $x \in R$ thỏa ít nhất một trong 2 mệnh đề "$x > 2$", "$x < 3$" nên câu trả lời $x \in R$.

b) Nếu $x \neq 3$ thì mệnh đề "$x = 3$" sai nên mệnh đề "$x^2 = 9$" $\Rightarrow$ "$x = 3$" chỉ sai khi $x = -3$. Nếu $x = 3$ thì mệnh đề "$x^2 = 9$" $\Rightarrow$ "$x = 3$" đúng.

Vậy : mệnh đề "$x^2 = 9$" $\Rightarrow$ "$x = 3$" đúng với mọi $x \neq -3$.

c) Trong các số nguyên dương, chỉ có các số 1 và 2 thỏa $x^2 < 6$, vậy các số cần tìm là 1 và 2.

d) Tương tự câu c), kết quả là 2, 3, 5, 7.

e) Tương tự câu c), kết quả là 1 và 2.

Bài 4

Phủ định các mệnh đề sau :

a) "$\forall x \in Z, x^2 \geq 0$"

b) "$\forall x \in [-2, 3] : 4 \leq x^2 \leq 9$"

c) "$\exists n \in Z^*, n^2 + 3n + 2$ là số nguyên tố"

d) "$\exists x \in R, x^2 < x$".

Giải

a) Phủ định của "$\forall x \in Z, x^2 \geq 0$" là "$\exists x_0 \in Z, x_0^2 < 0$".

b) Phủ định của "$\forall x \in [-2, 3] : 4 \leq x^2 \leq 9$" là "$\exists x_0 \in [-2, 3] : x_0^2 < 4$ hay $x_0^2 > 0$".

c) Phủ định của "$\exists n \in Z^*$, $n^2 + 3n + 2$ là số nguyên tố" là "$\exists n \in Z^*$, $n^2 + 3n + 2$ không là số nguyên tố".

d) Phủ định của "$\exists x \in R$, $x^2 < x$" là "$\forall x \in R$, $x^2 > x$".

Bài 5

Dùng bảng chân trị chứng minh các mệnh đề sau luôn đúng :

a) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

b) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Giải

a) Xét bảng chân trị :

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S
S	Đ	Đ	S	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ

Từ bảng chân trị, ta thấy $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ là mệnh đề hằng đúng.

b) Xét bảng chân trị :

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	S	S	S
S	S	Đ	S	S	Đ	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Từ bảng chân trị, ta thấy $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ là các mệnh đề hằng đúng.

Bài 6

Định a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}+|y|=a \\ \sqrt{y^2+2}+|x|=a \end{cases} \quad (I).$$

Giải

Nhận xét : nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (I) thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (I).

Vậy nếu (I) có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 0$ và $y_0 = 0 \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$

Với $a = \sqrt{2}$, $\quad (I) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+2}+|y|=\sqrt{2} \\ \sqrt{y^2+2}+|x|=\sqrt{2} \end{cases}$

Do $\sqrt{x^2+2}+|y| \geq \sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$

và $\sqrt{y^2+2}+|x| \geq \sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$.

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy, a thỏa bài toán $\quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{2}$.

Bài 7

Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giải

Giả sử ngược lại, suy ra $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

Vậy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (1), trong đó, m, n là các số nguyên, $n \neq 0$, phân số $\frac{m}{n}$ tối giản.

$(1) \Rightarrow \quad \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2 \qquad (2)$

$\Rightarrow \quad m^2$ là số chẵn $\quad \Rightarrow \quad$ m là số chẵn

$\Rightarrow \quad m = 2m'$, m' là số nguyên.

$(2) \Rightarrow \quad 4m'^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2m'^2 \quad \Rightarrow \quad n^2$ là số chẵn

$\Rightarrow \quad$ n là số chẵn $\quad \Rightarrow \quad n = 2n'$, n' là số nguyên.

(1) $\Rightarrow \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{2m'}{2n'}$ (m', n' là các số nguyên)

$\Rightarrow \quad \dfrac{m}{n}$ không tối giản : vô lí.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Bài 8

Cho A = {x ∈ R là nghiệm phương trình $x^3 - x^2 = 0$}.

Xác định A bằng cách liệt kê phần tử.

Giải

Ta có : $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

Vậy A = {0, 1}.

Bài 9

Cho B = {3, 5, 7, 11}.

Xác định B bằng cách nêu tính chất đặc trưng.

Giải

Do 3, 5, 7, 11 là các số nguyên tố lẻ đầu tiên nên

B = {n ∈ N / n nguyên tố ∧ $3 \le n \le 11$}

Nhận xét : ta có thể biểu diễn B bằng cách sau :

B = {n ∈ N / n là số lẻ ∧ $3 \le n \le 11$ ∧ n không là số chính phương}

Vậy có thể xác định một tập hợp bằng cách nêu nhiều tính chất đặc trưng khác nhau.

Bài 10

Cho A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. B = {x ∈ Z / $-3 < x \le 2$}.

C = {x ∈ R / $2x^2 - 3x = 0$}

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C.

b) Xác định các tập hợp sau : A ∩ B; B ∩ C; A ∩ C.

c) Xác định các tập hợp sau : A ∪ B; B ∪ C; A ∪ C.

d) Xác định các tập hợp sau : A \ B; B \ C; A \ C; R \ A.

Giải

a) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$;

$C = \{0, \frac{3}{2}\}$.

b) Do câu a) suy ra : $A \cap B = \{1, 2\}$;

$B \cap C = \{0\}$;

$A \cap C = \varnothing$.

c) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$B \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \frac{3}{2}\}$;

$A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \frac{3}{2}\}$.

d) $A \setminus B = \{3, 4, 5, 6\}$;

$B \setminus C = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$;

$A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$R \setminus A = \{x \in R / x \notin N \vee (x = 0) \vee (x \in N$ và $x > 6)$.

Bài 11

Cho $A = [-2 ; 5]$, $B = (0 ; +\infty)$, $C = [-\infty ; 3]$. Xác định :

a) $A \cup B$; $B \cup C$

b) $A \setminus B$; $B \setminus C$

c) $A \setminus (B \cup C)$; $(A \setminus B) \cup C$

d) $A \setminus (B \cap C)$; $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

e) $R \setminus B$; $R \setminus (A \cup B)$; $R \setminus (B \cap C)$.

Giải

a) $A \cup B = [-2 ; +\infty)$;

$B \cup C = R$.

b) $A \setminus B = [-2 ; 0]$;

$B \setminus C = (3 ; +\infty)$.

c) Do $B \cup C = R$ nên $A \setminus (B \cup C) = \varnothing$

Do $A \setminus B = [-2 ; 0] \subset (-\infty ; 3]$ nên $(A \setminus B) \cup C = (-\infty ; 3] = C$.

d) Do $B \cap C = (0 ; 3]$ nên $A \setminus (B \cap C) = [-2 ; 0] \cup (3 ; 5]$.

Do $A \setminus B = [-2 ; 0]$ và $A \setminus C = (2 ; 5]$ nên $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \varnothing$.

e) $R \setminus B = (-\infty ; 0]$.

Do $A \cup B = [-2 ; +\infty)$ nên $R \setminus (A \cup B) = (-\infty ; 2)$

Do $B \cap C = (0 ; 3]$ nên $R \setminus (B \cap C) = (-\infty ; 0] \cup (3 ; +\infty)$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. MỆNH ĐỀ

1. Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề ?

A. Các bạn hãy làm bài đi !

B. Bạn có chăm học không ?

C. Anh học lớp mấy

D. Việt Nam là một nước thuộc Châu Á.

2. Trong các câu sau đây, câu nào không là mệnh đề ?

A. Ăn phở rất ngon

B. Hà Nội là Thủ Đô của Thái Lan

C. Số 12 chia hết cho 3

D. 2 + 3 = 8.

3. Phủ định của mệnh đề : "Dơi là một loài chim" là mệnh đề nào sau đây ?

A. Dơi là một loài có cánh

B. Chim cùng loại với dơi

C. Dơi không phải là một loài chim

D. Dơi là một loại ăn trái cây.

4. Trong các phát biểu sau phát biểu nào là mệnh đề đúng

A. π là một số hữu tỉ

B. Tổng của hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba

C. Bạn có chăm học không ?

D. Con thì thấp hơn cha.

5. Mệnh đề $A \Rightarrow B$ được phát biểu như thế nào ?

A. A suy ra B

B. B được suy ra từ A

C. Nếu B thì A

D. A và B có cùng chân trị.

6. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh [illegible] đúng ?

A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia h [illegible] ho 3

C. Nếu em cố gắng học tập thì em sẽ thành công

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều.

7. Trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$ sau đây, mệnh đề nào có mệnh đề đảo sai? ·

A. Tam giác ABC cân $\Rightarrow$ tg ABC có hai cạnh bằng nhau

B. x chia hết cho 6 $\Rightarrow$ x chia hết cho 2 và 3

C. ABCD là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel CD$

D. ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow A = B = C = 90^0$.

8. Cách phát biểu nào sau đây không thể dùng để phát biểu mệnh đề : $A \Rightarrow B$

A. Nếu A thì B

B. A kéo theo B

C. A là điều kiện đủ để có B

D. A là điều kiện cần để có B.

9. Trong các mệnh đề tương đương sau đây, mệnh đề nào sai ?

A. n là số nguyên lẻ $\Leftrightarrow$ n^2 là số lẻ

B. n chia hết cho 3 $\Leftrightarrow$ tổng các chữ số của n chia hết cho 3

C. ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AC = BD$

D. ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow AB = AC$ và $= 60^0$.

10. Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề ?

A. $3 + 2 = 7$

B. $x^2 + 1 > 0$

C. $2 - \sqrt{5} < 0$

D. $4 + x = 3$.

11. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$

B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$

C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2.5$

D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow (-2)\sqrt{23} > (-2).5$.

12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng ?

A. Nếu a và b chia hết cho c thì

B. Nếu 2 tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau

C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9

D. Nếu một số có tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

13. Xét câu : P(n) = "n chia hết cho 12". Với giá trị nào của n sau đây thì P(n) là mệnh đề đúng ?

A. 48 B. 4 C. 3 D. 88.

14. Với giá trị thực nào của biến x sau đây thì mệnh đề chứa biến

$P(x) = "x^2 - 3x + 2 = 0"$ trở thành một mệnh đề đúng ?

A. 0 B. 1 C. -1 D. -2.

15. Trong các mệnh đề sau đây tìm mệnh đề đúng ?

A. $\forall x \in N$: x chia hết cho 3 B. $\exists x \in R : x^2 < 0$

C. $\forall x \in R : x^2 > 0$ D. $\exists x \in R : x > x^2$.

16. Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề "mọi động vật đều di chuyển" ?

A. Mọi động vật đều không di chuyển

B. Mọi động vật đều đứng yên

C. Có ít nhất một động vật di chuyển

D. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

17. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề sai ?

A. $\forall x \in R : x^2 > 0$ B. $\exists n \in N : n^2 = n$

C. $\forall n \in N : n \leq 2n$ D. $\exists x \in R : x < \frac{1}{x}$.

18. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào có mệnh đề phủ định đúng ?

A. $\forall n \in N : 2n \geq n$ B. $\forall x \in R : x < x + 1$

C. $\exists x \in Q : x^2 = 2$ D. $\exists x \in R : 3x = x^2 + 1$.

19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

B. Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60^0.

C. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

D. Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có 3 góc vuông.

20. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $\forall n \in N$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3

B. $\exists x \in R$, $|x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$

C. $\forall x \in R$, $(x - 1)^2 \neq x - 1$

D. $\exists n \in N$, $n^2 + 1$ chia hết cho 4.

21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. $\exists x \in Q$, $4x^2 - 1 = 0$

B. $\forall n \in N$, $n^2 > n$

C. $\exists x \in R$, $x > x^2$

D. $\forall n \in N$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

§2. TẬP HỢP

1. Các kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề : "3 là một số tự nhiên".

A. $3 \subset N$ B. $3 \in N$ C. $3 < N$ D. $3 \leq N$.

2. Các kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ".

A. $\sqrt{2} \neq Q$ B. $\sqrt{2} \not\subset Q$ C. $\sqrt{2} \notin Q$

D. $\sqrt{2}$ không trùng với Q.

3. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp : $X = \{x \in R \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$.

A. $X = \{0\}$ B. $X = \{1\}$ C. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ D. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

4. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp : $X = \{x \in R \mid x^2 + x + 1 = 0\}$.

A. $X = 0$ B. $X = \{0\}$ C. $X = \varnothing$ D. $X = \{\varnothing\}$.

5. Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề $A \neq \varnothing$.

A. $\forall x : x \in A$ B. $\exists x : x \in A$

C. $\exists x : x \notin A$ D. $\forall x : x \subset A$.

6. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $A \in A$ B. $\varnothing \subset A$ C. $A \subset A$ D. $A \in \{A\}$.

7. Cho hai tập hợp : $X = \{n \in N$ / n là bội dố của 4 và 6$\}$

$Y = \{n \in N$ / n là bội số của 12$\}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. $X \subset Y$ B. $Y \subset X$

C. $X = Y$ D. $\exists n : n \in X$ và $n \neq Y$.

8. Cho tập hơo $A = \{1, 2, \{3, 4\}, x, y\}$.

Xét các mệnh đề sau đây : (I) $3 \in A$

(II) $\{3, 4\} \in A$

(III) $\{a, 3, b\} \notin A$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ I đúng B. I, II đúng

C. II, III đúng D. I, III đúng.

9. Cho các mệnh đề sau : (I) $\{-2, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$

(II) $\varnothing \subset \varnothing$

(III) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ I đúng B. Chỉ I và II đúng

C. Chỉ I và III đúng D. Cả ba I, II, III đều đúng.

10. Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một tập hợp con ?

A. $\varnothing$ B. $\{1\}$ C. $\{\varnothing\}$ D. $\{\varnothing, 1\}$.

11. Trong các tạp hợp sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con ?

A. $\{x, y\}$ B. $\{x\}$ C. $\{\varnothing, x\}$ D. $\{\varnothing, x, y\}$.

12. Tập hợp $X = \{0, 1, 2\}$ có bao nhiêu tập hợp con ?

A. 3 B. 6 C. 7 D. 8.

13. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A. Xét các mệnh đề sau :

(I) $x \in A$

(II) $\{x\} \in A$

(III) $x \subset A$

(IV) $\{x\} \subset A$

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng ?

A. I và II   B. I và III   C. I và IV   D. II và IV.

14. Cho các tập hợp : H = tập hợp các hình bình hành

V = tập hợp các hình vuông

N = tập hợp các hình chữ nhật

T = tập hợp các hình tứ giác

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. $H \subset T$ B. $V \subset N$ C. $H \supset V$ D. $V \supset N$.

15. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng ?

A. $\{x \in Z / |x| < 1\}$ B. $\{x \in Z / 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$

C. $\{x \in Q / x^2 - 4x + 2 = 0\}$ D. $\{x \in R / x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

16. Tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ có bao nhiêu tập con gồm hai phần tử ?

A. 30   B. 15   C. 10   D. 3.

§3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

1. Cho hai tập hợp : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Y = \{2, 7, 4, 5\}$

Tập hợp nào sau đây bằng tập hợp $X \cap Y$?

A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{1, 3, 5, 7\}$ D. $\{1, 3\}$.

2. Cho hai tập hợp : $X = \{1, 3, 5\}$

$Y = \{2, 4, 6, 8\}$

Tập hợp $X \cap Y$ bằng tập hợp nào sau đây ?

A. $\{0\}$ B. $\{\varnothing\}$ C. $\varnothing$ D. $\{1, 3, 5\}$.

3. Cho hai tập hợp : $A = \{x \in N / x$ là ước số của $12\}$

$Y = \{x \in N / x$ là ước số của $18\}$

Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A ∩ B.

A. {1, 2, 3} B. {0, 1, 2, 3}

C. {1, 2, 3, 4, 6} D. {0, 1, 2, 3, 4, 6}.

4. Cho tập hợp A ≠ ∅. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. A ∩ A = A B. A ∩ ∅ = A

C. ∅ ∩ A = ∅ D. ∅ ∩ ∅ = ∅.

5. Cho hai tập hợp : X = {1, 3, 5, 8}

Y = {3, 5, 7, 9}

Tập hợp A ∪ B bằng tập hợp nào sau đây ?

A. {3, 5} B. {1, 3, 5, 7, 9}

C. {1, 7, 9} D. {1, 3, 5}.

6. Cho tập hợp A ≠ ∅. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. A ∪ ∅ = ∅ B. A ∪ A = A

C. ∅ ∪ ∅ = ∅ D. ∅ ∪ A = A.

7. Cho hai tập hợp : A = {2, 4, 6, 9}

B = {1, 2, 3, 4}

Tập hợp A \ B bằng tập hợp nào sau đây ?

A. {1, 2, 3, 5} B. {6, 9, 1, 3}

C. {6, 9} D. ∅.

8. Cho tập hợp A ≠ ∅. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. A \ ∅ = ∅ B. ∅ \ A = A

C. ∅ \ ∅ = A D. A \ A = ∅.

9. Cho hai tập hợp : E = {x ∈ R / f(x) = 0}

F = {x ∈ R / g(x) = 0}

Tập hợp : $G = \{x \in R / f^2(x) + g^2(x) = 0\}$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. G = E ∩ F B. G = E ∪ F

C. G = E \ F D. G = F \ E.

10. Cho hai tập hợp : E = {x ∈ R / f(x) = 0}

F = {x ∈ R / g(x) = 0}

Tập hợp : $H = \{x \in R \,/\, f(x).g(x) = 0\}$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $H = E \cap F$ B. $H = E \cup F$

C. $H = E \setminus F$ D. $H = F \setminus E$.

11. Cho hai tập hợp : $E = \{x \in R \,/\, f(x) = 0\}$

$F = \{x \in R \,/\, g(x) = 0\}$

Tập hợp : $K = \left\{x \in R \,/\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\right\}$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $K = E \cap F$ B. $K = E \cup F$

C. $K = F \setminus E$ D. $K = E \setminus F$.

12. Tập hợp $[-3, 1) \cup (0, 4]$ bằng tập hợp nào sau đây ?

A. $(0, 1)$ B. $[0, 1]$ C. $[-3, 4]$ D. $[-3, 0]$.

13. Tập hợp $[-3, 1) \cap [0, 4]$ bằng tập hợp nào sau đây ?

A. $(0, 1)$ B. $[0, 1)$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$.

14. Tập hợp $(-2, 3) \setminus [1, 5]$ bằng tập hợp nào sau đây ?

A. $(-2, 1)$ B. $(-2, 1]$ C. $(-3, -2)$ D. $(-2, 5)$.

15. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề đúng ?

A. $E \subset E \cap F$ B. $E \cup F \subset F$

C. $E \setminus F \subset F$ D. $E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$.

16. Nhà toán học Canto là người nước nào ?

A. Pháp B. Đức C. Ý D. Ba Lan.

Chương II

HÀM SỐ

A. LÍ THUYẾT

§1. *Khái niệm hàm số*

1. Định nghĩa :

Cho D là tập con khác rỗng của tập các số thực R.

Một hàm số f xác định trên D là một quy tắc cho ứng với mỗi phần tử $x \in D$ một và chỉ một số thực y.

D gọi là tập xác định (hay miền xác định) của hàm số f, $x \in D$ gọi là biến số (hay đối số). Số thực y tương ứng với x gọi là giá trị hàm số f tại x, kí hiệu là f(x).

Ta viết : $f : D \rightarrow R$

$x : \rightarrow y = f(x)$

Công thức $t = f(x)$ gọi là quy tắc tìm giá trị f(x) của hàm số f tại mọi $x \in D$.

Như vậy : một hàm số được xác định nếu ta biết tập xác định D và qui tắc tìm giá trị $y = f(x)$ của hàm số.

Chú ý : Nếu chỉ cho biết biểu thức f(x) thì qui ước miền xác định D là tập tất cả các số thực x sao cho f(x) có nghĩa.

2. Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm M(x; y) trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $x \in P$ và $y = f(x)$.

Công thức $y = f(x)$ được gọi là phương trình của đồ thị

3. Sự biến thiên của hàm số :

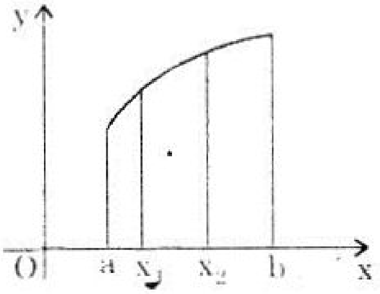
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a; b).

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên (a; b) nếu với mọi số thực x_1, x_2 thuộc (a; b) ta có :

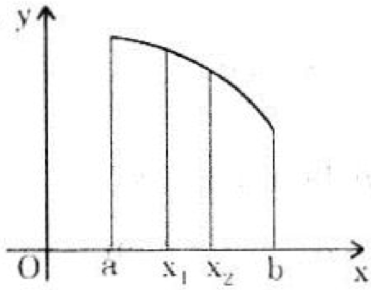
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số y = f(x) được gọi là nghịch biến trên (a; b) nếu với mọi số thực x_1, x_2 thuộc (a; b) ta có :

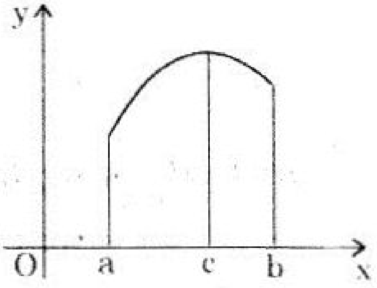
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$



f tăng trên (a, b)



f giảm trên (a, b)



f tăng trên (a, c) và giảm trên (c, b)

4. Tính chẵn lẻ :

4.1 Định nghĩa :

Cho hàm số y = f(x) xác định trên D

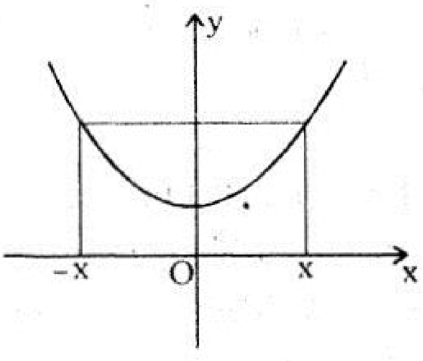
Hàm số y = f(x) được gọi là chẵn trên D $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Hàm số y = f(x) được gọi là lẻ trên D $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

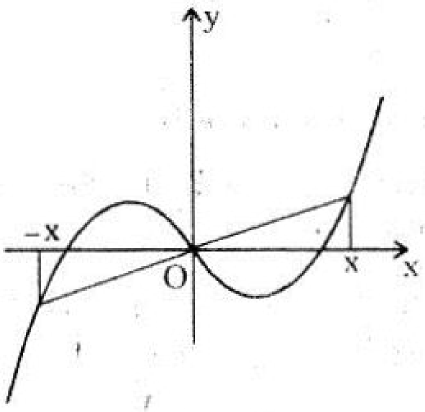
4.2 Định lí :

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



Đồ thị hàm chẵn



Đồ thị hàm lẻ

5. Phương pháp giải toán

a) Tìm tập xác định của hàm số :

Hàm số $\frac{1}{f(x)}$ xác định khi f(x) xác định và $f(x) \neq 0$.

Hàm số $\sqrt{f(x)}$ xác định khi f(x) xác định và $f(x) \geq 0$.

Hàm số $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định khi f(x) xác định và $f(x) > 0$.

b) Tính chẵn, lẻ của hàm số :

Để xác định tính chẵn lẻ của hàm số, ta chú ý các điều sau :

1) Nếu tập xác định của hàm số không đối xứng qua số 0, hàm số không chẵn, không lẻ.

2) Nếu $\exists x_0 \in D : f(x_0) \neq f(-x_0)$: f(x) không là hàm số chẵn trên D.

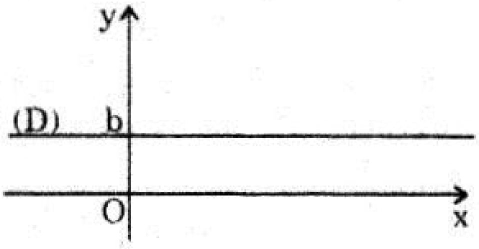
3) Nếu $\exists x_0 \in D : f(x_0) \neq -f(-x_0)$: f(x) không là hàm lẻ trên D.

§2. Hàm số y = ax + b

1. Đồ thị hàm số y = b :

Hàm số y = b gọi là hàm số hằng (hay gọi tắt là hàm hằng).

Đồ thị hàm số y = b là đường thẳng (D) song song với Ox nếu $b \neq 0$ và là Ox nếu $b = 0$.



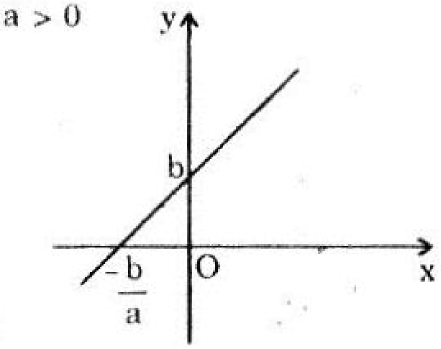
2. Hàm số y = ax + b :

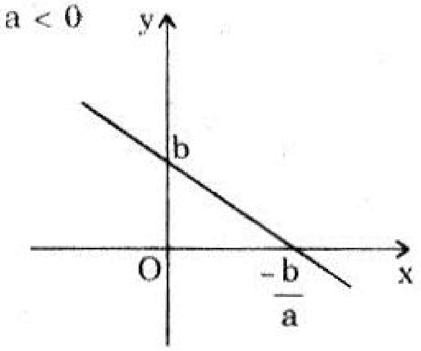
Hàm số y = ax + b xác định trên R, tăng trên R khi $a > 0$, giảm trên R khi $a < 0$.

Đồ thị hàm số y = ax + b $(a \neq 0)$ là một đường thẳng không cùng phương với các trục tọa độ, a gọi là hệ số góc của đường thẳng.

$b \neq 0$: đồ thị cắt Ox tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ và cắt Oy tại điểm B(0,b).

$b = 0$: đồ thị hàm số $y = ax$ qua gốc O và điểm C(1, a).





3. Đường thẳng $Ax + By + C = 0$:

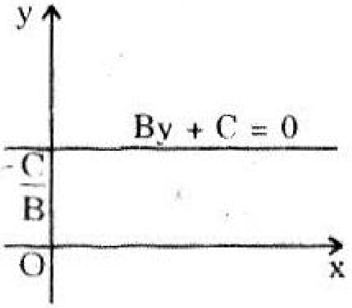
Tập hợp các điểm (x; y) thỏa mãn phương trình $Ax + By + C = 0$ (A, B không đồng thời bằng 0) là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

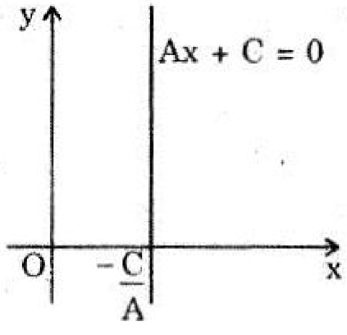
Đặc biệt :

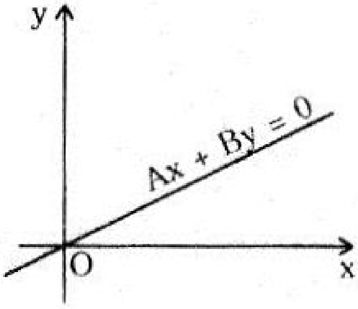
$A = 0$: đường thẳng $By + C = 0$ cùng phương với Ox, cắt Oy tại điểm $(0; -C/B)$.

$B = 0$: đường thẳng $Ax + C = 0$ cùng phương với Oy, cắt Ox tại điểm $(-C/A; 0)$.

$C = 0$: đường thẳng $Ax + By = 0$ qua gốc O.







§3. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc 2 là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

1. Hàm số $y = ax^2$:

Hàm số $y = ax^2$ xác định trên R.

Hàm số $y = ax^2$:

Nếu $a > 0$: giảm trên $(-\infty; 0)$, tăng trên $(0; \infty)$, đạt cực tiểu khi $x = 0$.

Nếu $a < 0$: tăng trên $(-\infty; 0)$, giảm trên $(0; \infty)$, đạt cực đại khi $x = 0$.

Bảng biến thiên :

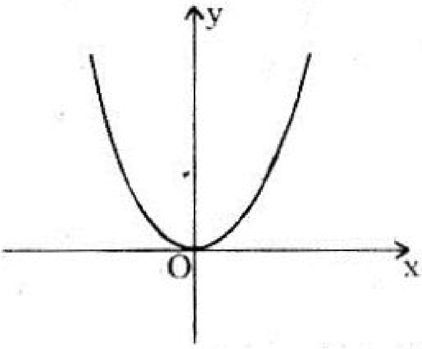
$a > 0$

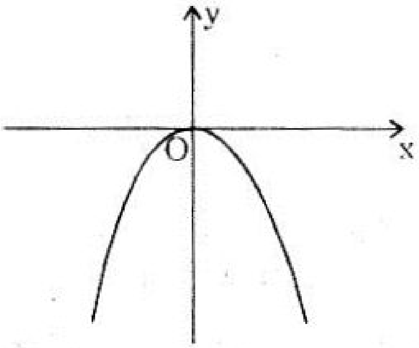
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ được gọi là một parabol, có đỉnh O và nhận Oy làm trục đối xứng.





2. Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

Nếu $a > 0$: hàm số giảm trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và tăng trên $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$.

Nếu $a < 0$: hàm số tăng trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và giảm trên $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$.

Bảng biến thiên :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol, đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

3. Phương pháp giải toán

a) Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c = 0$:

1) Trước tiên xác định đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, lưu ý trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

2) Lấy thêm vài điểm tùy ý và điểm đối xứng của chúng qua trục đối xứng. Ta thường lấy giao điểm của (P) với Oy, giao điểm của (P) với Ox (nếu có).

b) Từ đồ thị (C) : $y = f(x)$ suy ra đồ thị
$(C_1) : y = |f(x)|$; $(C_2) : y = f(|x|)$

1) Do $|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \geq 0 \\ -f(x) \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$ nên (C_1) có được bằng cách giữ nguyên phần của (C) trên Ox và lấy đối xứng phần còn lại của (C) qua Ox.

2) Do $y = f(|x|)$ là hàm chẵn, và đồ thị hàm chẵn nhận Oy là trục đối xứng nên (C_2) có được bằng giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$ và lấy đối xứng phần vừa chọn qua Oy.

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Tìm tập xác định các hàm số sau :

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{|x|-2}$ **b)** $\sqrt{2x-1} + \frac{x+2}{\sqrt{3-x}}$

c) $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3x-6} + \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$.

Giải

a) f(x) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ |x| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq -1 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = [-1, +\infty)\setminus\{2\}$.

b) f(x) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 1 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x < 3$

Vậy tập xác định $D = \left[\dfrac{1}{2}, 3\right)$.

c) f(x) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ 3x - 6 \ge 0 \\ 2x^2 - 4x + 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$

Vậy tập xác định $D = [2, +\infty)$.

Bài 2

Định m để hàm số $y = \sqrt{2x + m + 1} + \dfrac{1}{x - m}$ xác định với mọi $x > 1$.

Giải

m thỏa bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + m - 1 \ge 0, \forall x > 1 \\ x - m > 0, \forall x > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1 - m}{2}, \forall x > 1 \\ x > m, \forall x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - m}{2} \le 1 \\ m \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1.$$

Vậy tập xác định là $D = [-1, 1]$.

Bài 3

Xét tính chẵn lẻ hàm số sau :

a) $f(x) = 2x^2 - |x|$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2\sin x$

c) $f(x) = 2\sin^3 x - \sin x, \ -\pi/2 \le x \le \pi$

d) $f(x) = x^2 - 3x$.

Giải

a) Tập xác định : D = R.

Do $f(-x) = 2(-x)^2 - |-x| = 2x^2 - |x| = f(x)$, $\forall x \in D$ nên f(x) là hàm chẵn.

b) Tập xác định : D = R.

Do $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2\sin(-x) = -x^3 + 3x - 2\sin x = -f(x)$, $\forall x \in D$ nên f(x) là hàm lẻ.

c) Tập xác định : $D = \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Do D không đối xứng qua số 0 nên f(x) không là hàm chẵn, không là hàm lẻ.

d) Tập xác định : D = R.

Do $f(-1) = 4 \neq -2 = f(1)$ nên f(x) không là hàm chẵn.

Do $f(-1) = 4 \neq 2 = -f(1)$ nên f(x) không là hàm lẻ.

Vậy f(x) không là hàm chẵn, không là hàm lẻ.

Bài 4

Dùng định nghĩa tìm khoảng tăng giảm của :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 2.$$

Giải

$f(x) = -(x-2)^2 + 6$

Với bất kì $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ &\Rightarrow (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \\ &\Rightarrow -(x_1 - 2)^2 + 1 > -(x_2 - 2)^2 + 1 > f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

vậy f(x) giảm trên $(2, +\infty)$.

Với bất kì $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2 \\ &\Rightarrow -(x_1 - 2)^2 + 1 < -(x_2 - 2)^2 + 1 > f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

vậy f(x) tăng trên $(-\infty, 2)$.

Kết luận : f(x) tăng trên $(-\infty, 2)$ và giảm trên $(2, +\infty)$.

Bài 5

Dùng định nghĩa chứng minh :

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ tăng trên $(1, +\infty)$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ giảm trên $(3, +\infty)$.

Giải

a) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$.

Với bất kì $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ &\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \\ &\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + 1 < (x_2 - 1)^2 + 1 > f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

vậy f(x) tăng trên $(1, +\infty)$.

b) $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x - 3}$

Với bất kì $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad 0 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1 - 3} > \frac{1}{x_2 - 3} \\ &\Rightarrow \quad 2 + \frac{1}{x_1 - 3} > 2 + \frac{1}{x_2 - 3} > f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

vậy f(x) giảm trên $(3, +\infty)$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

1. Cho hàm số : $f(x) = \sqrt{x - 1} + \dfrac{1}{x - 3}$.

Tập hợp nào sau đây là tập xác định của f(x) ?

A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$

C. $[1, 3) \cup (3, +\infty)$ D. $(1, +\infty) \setminus \{3\}$.

2. Tập xác định của hàm số : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ là tập hợp nào sau đây ?

A. R　　　　　　　　B. $R \setminus \{\pm 1\}$

C. $R \setminus \{1\}$　　　　　　　　D. $R \setminus \{-1\}$.

3. Cho hàm số : $y = f(x) = |2x - 3|$. Tìm x để $f(x) = 3$.

A. $x = 3$　　　　　　　　B. $x = 3$ hay $x = 0$

C. $x = \pm 3$　　　　　　　　D. Một kết quả khác.

4. Cho hàm số : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & x \leq 0 \\ \sqrt{x + 2} & x > 0 \end{cases}$.

Tập xác định của hàm số là tập hợp nào sau đây ?

A. $[-2, +\infty)$　　　　　　　　B. $R \setminus \{1\}$

C. R　　　　　　　　D. $\{x \in R \,/\, x \neq 1$ và $x \geq -2\}$.

5. Cho hàm số : $y = \dfrac{x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$.

Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đồ thị hàm số :

A. $M_1(2; 3)$　　　　　　　　B. $M_2(0; 1)$

C. $M_3\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$　　　　　　　　D. $M_4(1; 0)$.

6. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $y = f(x)$ là hàm số chẵn

B. $y = f(x)$ là hàm số lẻ

C. $y = f(x)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ

D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

7. Xét tính chất chẵn lẻ của hàm số : $y = 2x^3 + 3x + 1$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. y là hàm số chẵn

B. y là hàm số lẻ

C. y là hàm số không có tính chẵn lẻ

D. y là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là hàm số chẵn ?

A. $y = |x + 1| + |1 - x|$ B. $y = |x + 1| - |x - 1|$

C. $y = |x^2 - 1| + |x - 1|$ D. $y = |x + 1| + |1 - x|$.

9. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là hàm số lẻ ?

A. $y = x^3 + 1$ B. $y = x^3 - x$

C. $y = x^3 + x$ D. $y = \frac{1}{x}$.

10. Trong các hàm số sau, hàm số nào tăng trên khoảng $(-1, 0)$?

A. $y = x$ B. $y = \frac{1}{x}$

C. $y = |x|$ D. $y = x^2$.

11. Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng $(0; 1)$?

A. $y = x^2$, B. $y = x^3$

C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = \sqrt{x}$.

12. Cho hàm số : $y = 0$. trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

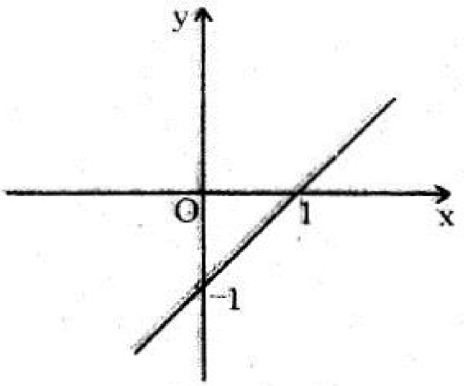
A. y là hàm số chẵn

B. y là hàm số lẻ

C. y là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

D. y là hàm số không có tính chẵn lẻ.

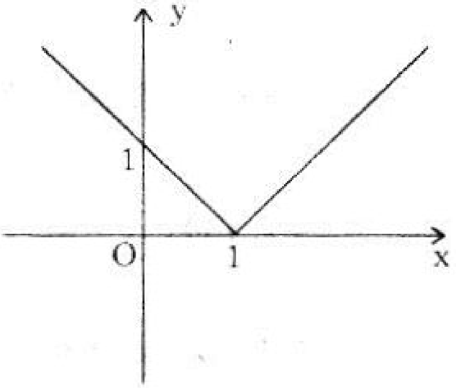
13. Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số nào ?



A. $y + x + 1$ B. $y = x - 1$

C. $y = - x - 1$ D. $y = - x + 1$.

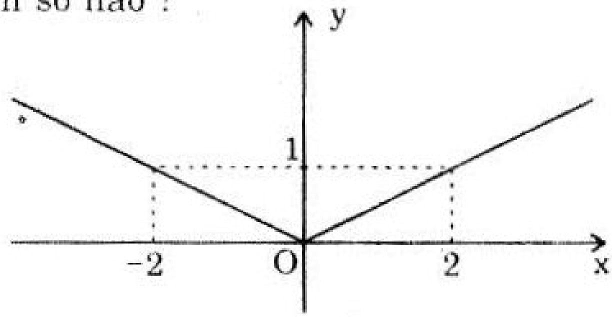
14. Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số nào ?



A. $y = |x|$ B. $y = |x - 1|$

C. $y = |x + 1|$ D. $y = |x| + 1$.

15. Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số nào ?



A. $y = |x|$

B. $y = |2x|$

C. $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$

D. $y = |3 - x|$.

16. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số : $y = \sqrt{|2x - 3|}$.

A. $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ B. $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ C. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$ D. R.

19. Cho hàm số : $y = x^2 - 2x + 3$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. y tăng trên khoảng $(0; +\infty)$

B. y giảm trên khoảng $(-\infty; 2)$

C. Đồ thị của y có đỉnh $I(1; 0)$

D. y tăng trên $(2; \infty)$.

20. Cho hàm số : $y = -x^2 + 2x + 1$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

A. y giảm trên khoảng $(2; +\infty)$

B. y tăng trên khoảng $(+\infty; 0)$

C. y giảm trên khoảng $(0; +\infty)$

D. y tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. LÍ THUYẾT

§1. *Phương trình*

I. Định nghĩa :

1. Phương trình là bài toán có dạng f(x) = g(x) nội dung của bài toán là đi tìm tất cả các giá trị x_0 sao cho $f(x_0)$ và $g(x_0)$ có nghĩa và đẳng thứ $f(x_0) = g(x_0)$ có chân trị đúng.
2. Giá trị x_0 nói trên được gọi là nghiệm của phương trình.
3. Cho hai phương trình : $f_1(x) = g_1(x)$ (1)

   $f_2(x) = g_2(x)$ (2)

   * (1) và (2) được gọi là phương trình nếu chúng có tập nghiệm trùng nhau.

   * Phương trình (2) được gọi là phương trình hệ quả của (1) nếu mọi nghiệm của (1) đều thỏa (2).

II. Phương pháp chung

Để giải và biện luận một phương trình f(x) = g(x) ta thường thực hiện các bước sau :

1. Đặt các điều kiện để f(x) và g(x) có nghĩa
2. Biến đổi tương đương để tìm x
3. Kiểm tra các điều kiện
4. Lập bảng kết luận.

§2. *Phương trình bậc nhất*

I. Phương trình bậc nhất 1 ẩn

1. Định nghĩa :

Phương trình bậc nhất là phần tử có dạng ax + b = 0 trong đó x là ẩ số; a, b ∈ R và a ≠ 0.

2. Giải và biện luận phương trình ax + b = 0

Bảng tóm tắt :

Cho phương trình $\boxed{ax + b = 0}$ (1)

* Nếu a = 0 : (1) trở thành ax + b = 0.

- b = 0 : mọi $x \in R$ đều là nghiệm của (1).
- $b \neq 0$: (1) VN.

* Nếu $a \neq 0$: (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ghi chú : Các phương trình qui về bậc nhất :

1) Phương trình tích :

* *Dạng :* A.B.C = 0 (A, B, C là các nhân tử bậc nhất).

* *Giải :*

$$A.B.C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} A = 0 & (a) \\ B = 0 & (b). \\ C = 0 & (c) \end{array}\right.$$

Lưu ý :

Tập nghiệm của phương trình đã cho là hợp các tập nghiệm của các phương trình (a), (b), (c).

2) Phương trình có ẩn số ở mẫu :

* *Dạng thường gặp :* $\dfrac{A}{B} = K$ trong đó B có chứa ẩn số.

* *Giải :*

- Đặt điều kiện cho ẩn số (được suy ra từ $B \neq 0$).
- Biến đổi phương trình về dạng ax + b = 0.

3) Phương trình có ẩn số trong căn số :

* *Dạng thường gặp :* $\sqrt{A} = B$ (1)

$\sqrt{A} = \sqrt{B}$ (2)

* *Giải :*

- Đặt điều kiện cho ẩn số (đối với phương trình (1) : $A \geq 0$

đối với phương trình (2) : $A \geq 0$ hay $B \geq 0$).

– Bình phương hai vế của phương trình :

$$(1) \Leftrightarrow A = B^2$$

$$(2) \Leftrightarrow A = B$$

4) Phương trình có dấu giá trị tuyệt đối :

* *Dạng thường gặp :* $|A| = B \quad (1)$

$|A| = |B| \quad (2)$

* *Giải :* $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A = B & (2') \\ A = -B & (2'') \end{array}\right.$

Lưu ý :

Tập nghiệm của phương trình (2) là hợp các tập nghiệm của (2') và (2'').

II. Phương trình bậc nhất hai ẩn

* Phương trình bậc nhất 2 ẩn có dạng : $ax + by + c = 0$ (*)
trong đó x và y là hai ẩn số; a, b, c là những hệ số với a và b không đồng thời bằng 0.

* Cặp (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 + c = 0$ gọi là nghiệm của phương trình.

Giải phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

1. Giải và biện luận phương trình $\boxed{ax + by + c = 0}$ (1)

* $a = b = 0$

Phương trình (1) trở thành : $c = 0$

- Nếu $c = 0$: (1) VN
- Nếu $c \neq 0$: (1) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y \in R \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \quad y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$ hay $x = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$

Do đó (1) VSN (x, y) định bởi :

$$\begin{cases} x \in R \\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y \in R \\ x = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y \end{cases}$$

* $a = 0$ và $b \neq 0$

Phương trình (1) trở thành :

$$by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{c}{b}$$

Do đó (1) VSN (x, y) định bởi : $\begin{cases} x \in R \\ y = -\dfrac{c}{b} \end{cases}$

* $a \neq 0$ và $b = 0$

Phương trình (1) trở thành :

$$ax + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{a}.$$

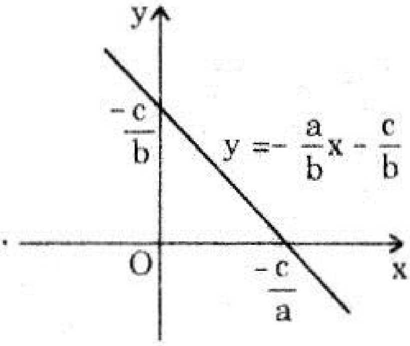
Do đó (1) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x = -\dfrac{c}{a} \\ y \in R \end{cases}$

2. Biểu diễn hình học của tập nghiệm :

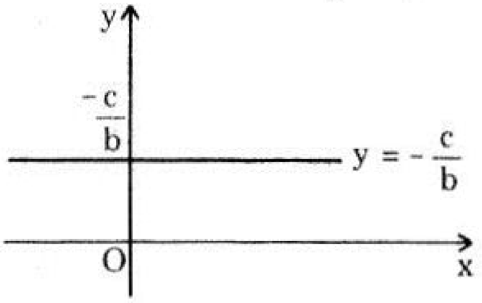
Trong mặt phẳng Oxy, xét điểm M(x, y) với x, y là nghiệm bất kì của phương trình : $ax + by + c = 0$.

Tập hợp các điểm này là thẳng có phương trình : $ax + by + c = 0$.

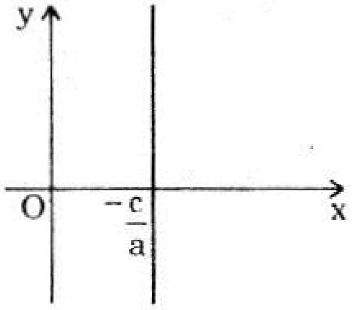
* $a \neq 0$ và $b \neq 0$


y
$-\frac{c}{b}$
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
O
$-\frac{c}{a}$
x

* $a = 0$ và $b \neq 0$


y
$-\frac{c}{b}$
$y = -\frac{c}{b}$
O
x

* $a \neq 0$ và $b = 0$



§3. Hệ phương trình bậc nhất

I. Định nghĩa

Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn số là hệ phương trình có dạng :

$$(I) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

II. Cách giải

1. Các cách giải đã biết :

- Phương pháp cộng : thường sử dụng khi $a = \pm a'$ hay $b = \pm b'$.
- Phương pháp thế : thường sử dụng khi $a = \pm 1$, hay $a' = \pm 1$ hay $b = \pm 1$ hay $b' = \pm 1$.
- Phương pháp đồ thị.

2. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$(I) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Phương pháp Ciamer

* $a = a' = b = b' = 0$

Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} c = 0 \\ c' = 0 \end{cases}$

- Nếu $c = c' = 0$

Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y \in R \end{cases}$

- Nếu $c \neq 0$ hay $c' \neq 0$

Hệ (I) VN.

* $a \neq 0 \vee a' \neq 0 \vee b \neq 0 \vee b' \neq 0$ (nghĩa là $a^2 + a'^2 + + b^2 + b'^2 \neq 0$).

Đặt $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

$$D_x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$$

$$D_y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a$$

- Nếu $D \neq 0$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$.

- Nếu $D = 0$ và $\left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right.$

Hệ (I) VN.

- Nếu $D = D_x + D_y = 0$

Hệ (I) VSN.

Ghi chú :

- Trong trường hợp $D = D_x + D_y = 0$ hệ (I) có VSN thì ta phải chỉ rõ công thức nghiệm.
- Hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn số, vẫn giải được phương pháp cộng, phương pháp thế. Ta thường khử trước 1 ẩn để đưa hệ về dạng hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn.

III. Biểu diễn hình học của tập nghiệm

Tập nghiệm của phương trình $ax + by + c = 0$ và $a'x + b'y + c' = 0$.

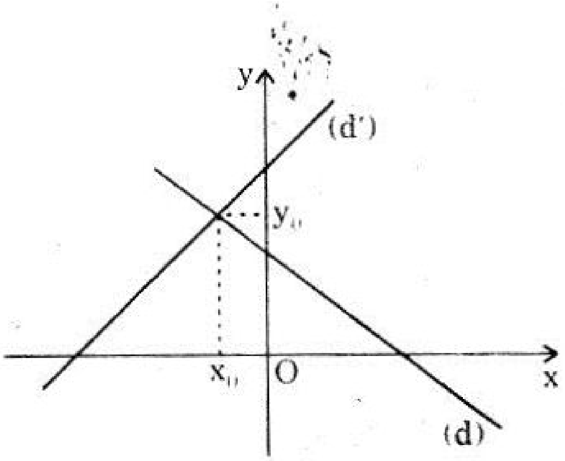
lần lượt được biểu diễn bằng đường thẳng (d) : $ax + by + c = 0$

và (d') : $a'x + b'y + c' = 0$.

Do đó, nghiệm của hệ là tọa độ điểm chung của (d) và (d').

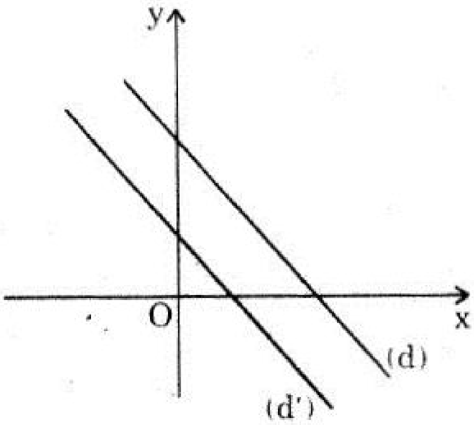
* $D \neq 0 \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$:

Hệ (I) có nghiệm duy nhất.



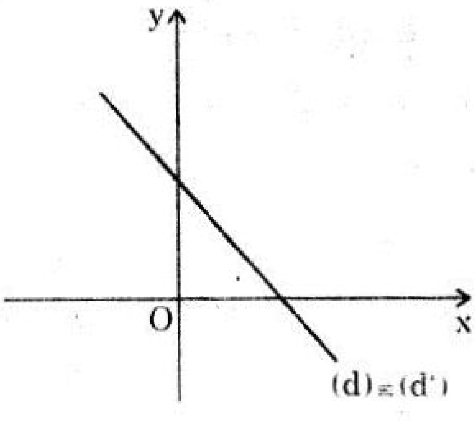
* $D = 0$ và $\left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $ab' - a'b = 0$ và $\left[\begin{array}{l} bc' - b'c \neq 0 \\ ac' - a'c \neq 0 \end{array}\right.$

Hệ (I) VN.



* $D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab' - a'b = 0 \\ bc' - b'c = 0 \\ ac' - a'c = 0 \end{cases}$

Hệ (I) VSN.



B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Giải các phương trình sau đây :

a) $(x + 5)^2 = (x - 12)^2 + x + 13$

b) $\dfrac{(x - 3)^2}{6} - \dfrac{(x - 6)^2}{15} = \dfrac{(x + 9)^2}{10} - \dfrac{13x + 1}{3}$

c) $\dfrac{x - a}{bc} + \dfrac{x - b}{ca} + \dfrac{x - c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

với a, b, c $\in$ N* thỏa điều kiện $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = 0$.

d) $\dfrac{a + b - x}{c} + \dfrac{a + c - x}{b} + \dfrac{b + c - x}{a} + \dfrac{4x}{a + b + c} = 1$

với a, b, c $\in$ N* thỏa điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{4}{a + b + c} \neq 0$.

Giải

a) $(x + 5)^2 = (x - 12)^2 + x + 13$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 - 24x + 144 + x + 13$

$\Leftrightarrow 13x = 132$

$\Leftrightarrow x = 4.$

b) $\dfrac{(x - 3)^2}{6} - \dfrac{(x - 6)^2}{15} = \dfrac{(x + 9)^2}{10} - \dfrac{13x + 1}{3}$

$\Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 2(x - 6)^2 = 3(x + 9)^2 - 10(13x - 1)$

$\Leftrightarrow 5(x^2 - 6x + 9) - 2(x^2 - 12x + 36) = 3(x^2 + 18x + 81) - 130x + 10$

$\Leftrightarrow 70x = 280$

$\Leftrightarrow x = 4.$

c) $\dfrac{x - a}{bc} + \dfrac{x - b}{ca} + \dfrac{x - c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x - a}{bc} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right) + \left(\dfrac{x - b}{ca} - \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right) + \left(\dfrac{x - c}{ab} - \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x - a - b - c}{bc} + \dfrac{x - b - c - a}{ca} + \dfrac{x - c - a - b}{ab} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-a-b-c=0 \text{ vì } \left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\neq 0 \text{ theo giả thiết}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=a+b+c.$$

d) $$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b-x}{c}+1\right)+\left(\frac{a+c-x}{b}+1\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+1\right)=4-\frac{4x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}=4\frac{a+b+c-x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-x=0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\neq 0 \text{ theo gt}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=a+b+c.$$

Bài 2

Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $(m^2-m)x=m-1$

b) $2mx-x+2=3m-1$

c) $(3m-1)x+1=-m-4x$.

Giải

a) $(m^2-m)x=m-1 \text{ (a)}$

Xét $a=m^2-m=m(m-1)$

Biện luận :

* $a=0 \Leftrightarrow m(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

- $m=0$

  Phương trình (a) trở thành : $0x=-1$

$\Rightarrow$ Phương trình (a) VN.

- $m = 1$

Phương trình (a) trở thành : $0x = 0$ (thỏa $\forall x \in R$)

$\Rightarrow$ Phương trình (a) VSN, $x \in R$.

* $a \neq 0 \Leftrightarrow m(m - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Phương trình (a) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m - 1}{m(m - 1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{m}$.

Kết luận : $m = 0$ phương trình (a) VN.

$m = 1$ phương trình (a) VSN, $x \in R$.

$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ phương trình (a) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{m}$.

b) $2mx - x + 2 = 3m - 1 \Leftrightarrow (2m - 1)x = 3(m - 1)$ (b)

Xét $a = 2m - 1$

Biện luận :

* $a = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Phương trình (b) trở thành $0x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình (b) VN.

* $a = 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$

Phương trình (b) $\Leftrightarrow x = \dfrac{3(m - 1)}{2m - 1}$.

Kết luận : $m = \dfrac{1}{2}$ phương trình (b) VN.

$m \neq \dfrac{1}{2}$ phương trình (b) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3(m - 1)}{2m - 1}$.

c) $(3m - 1)x + 1 = -m - 4x \Leftrightarrow (3m - 1 + 4)x = -m - 1$

$\Leftrightarrow 3(m + 1)x = -(m + 1)$ (c)

Xét $a = m + 1$

* $a = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Phương trình (c) VSN, $x \in R$

* $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Phương trình (c) $\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-(m+1)}{3(m+1)}$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.$$

Kết luận : $m = -1$ phương trình (c) VN.

$m \neq -1$ phương trình (c) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{3}$.

d) $(mx - 1)^2 + x = mx(ma - m - 2)$

$\Leftrightarrow \quad m^2x^2 - 2mx + 1 + x = m^2x^2 - m^2x - 2mx$

$\Leftrightarrow \quad (1 + m^2)x = -1 \text{(d)}$

Xét $a = m^2 + 1 \Rightarrow \quad a \neq 0, \forall m \in R$

$\Rightarrow$ Phương trình (d) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{m^2 + 1}$.

Bài 3

Giải và biện luận các phương trình sau đây (với a, b là tham số).

a) $ax + b^2 = bx + a^2$ **b)** $a^2x = b^2x + ab$.

Giải

a) $ax + b^2 = bx + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)x = a^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)x = (a - b)(a + b) \quad \text{(a)}$

Biện luận :

* Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

Phương trình (a) trở thành **0x = 0 (thỏa $\forall$x $\in$ R)**

$\Rightarrow$ Phương trình **(a)** có **VSN, x** $\in$ R.

* Nếu $a - b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$

Phương trình (a) $\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{(a - b)(a + b)}{a - b}$

$$\Leftrightarrow \quad x = a + b.$$

Kết luận : $a = b$ phương trình (a) VSN, $x \in R$.

$a \neq b$ phương trình (a) có nghiệm duy nhất $x = a + b$.

b) $a^2x = b^2x + ab \Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = ab$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b)x = ab \qquad (b)$$

* Nếu $(a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

- $a = b$

  Phương trình (b) trở thành : $0x = a^2$

  – Nếu $a = 0$ phương trình (b) VSN, $x \in R$.

  – Nếu $a \neq 0$ phương trình (b) VN.

- $a = -b$

  Phương trình (b) trở thành : $0x = -a^2$

  – Nếu $a = 0$ phương trình (b) VSN, $x \in R$.

  – Nếu $a \neq 0$ phương trình (b) VN.

* Nếu $(a + b) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases}$

Phương trình (b) $\Leftrightarrow x = \dfrac{ab}{(a + b)(a - b)}$.

Kết luận : $a = b = 0$ phương trình (b) VSN, $x \in R$.

$a = \pm b \neq 0$ phương trình (b) VN.

$\begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases}$ phương trình (b) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{ab}{(a + b)(a - b)}.$$

Bài 4

Giải và biện luận các phương trình :

a) $\dfrac{x - m}{x + 1} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

b) $\dfrac{mx + m}{\sqrt{x - 1}} - 2\sqrt{x - 1} = m\sqrt{x - 1}$.

Giải

a) $\dfrac{x - m}{x + 1} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$ (a)

Điều kiện $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Phương trình (a) $\Leftrightarrow (x - m)(x - 1) = (x - 2)(x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - x - mx + m = x^2 + x - 2x - 2$

$\Leftrightarrow mx = m + 2$ (a').

Biện luận phương trình (a')

* $m = 0$

Phương trình (a') trở thành $0x = 2 \Rightarrow$ Phương trình (a') VN.

* $m \neq 0$

Phương trình (a') $\Leftrightarrow x = \dfrac{m + 2}{m}$

$x = \dfrac{m + 2}{m}$ là nghiệm của phương trình (a) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m + 2}{m} \neq 1 \\ \dfrac{m + 2}{m} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \neq m \\ m + 2 \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Kết luận : $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$ phương trình (a) VN.

$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$ phương trình (a) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m + 2}{m}$.

b) $\dfrac{mx + m}{\sqrt{x - 1}} - 2\sqrt{x - 1} = m\sqrt{x - 1}$

Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\frac{x + m}{\sqrt{x - 1}} - 2\sqrt{x - 1} = m\sqrt{x - 1} \qquad \text{(b)}$$

$\Leftrightarrow x + m - 2(x - 1) = m(x - 1)$

$\Leftrightarrow x + m - 2x + 2 = mx - m \Leftrightarrow (m + 1)x = 2(m + 1)$ (b')

Biện luận phương trình (b')

* Nếu $m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$

Phương trình (b') trở thành $0x = 0$ (thỏa $\forall x \in R$)

$\Rightarrow$ phương trình (b') VSN, $x \in R$.

* Nếu $m + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -1$

$$\text{Phương trình (b')} \Leftrightarrow \quad x = \frac{2(m+1)}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2.$$

$x = 2$ là nghiệm của phương trình (b) $\Leftrightarrow \quad a > 1$ (đúng $\forall m \in R$).

Vậy : $m = -1$ phương trình (b) VSN, $\forall x > 1$.

$m \neq -1$ phương trình (b) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 5

Giải và biện luận phương trình : $|mx - 2| = |x + m|$.

Giải

$$|mx - 2| = |x + m| \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - 2 = x + m \\ mx - 2 = (x + m) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m - 1)x = m + 2 & (1) \\ (m + 1)x = 2 - m & (2) \end{array}\right.$$

- *Giải và biện luận (1)*

(1) $\Leftrightarrow \quad (m - 1)x = m + 2$

* $m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$

(1) trở thành $0x = 3 \quad \Rightarrow$ phương trình (1) VN.

* $m - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 1$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{m+2}{m-1}.$$

- *Giải và biện luận (2) :*

(2) $\Leftrightarrow \quad (m + 1)x = 2 - m$

* $m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$

(2) trở thành $0x = 3 \quad \Rightarrow$ phương trình (2) VN.

* $m + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -1$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{2-m}{m+1}.$$

- *Nhận xét*

$$m = -1 \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$m = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

- *Kết luận*

$m = -1$ phương trình (*) có một nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

$m = 1$ phương trình (*) có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ phương trình (*) có 2 nghiệm $x_1 = \dfrac{m+2}{m-1}$, $x_2 = \dfrac{2-m}{m+1}$.

Bài 6

Giải và biện luận phương trình :

$$(a^2 + 4)x - (b^2 + 1)x = a(a^2 - b^2) + 5x$$

trong đó a, b là tham số.

Giải

$$(a^2 + 4)x - (b^2 + 1)x = a(a^2 - b^2) + 5x$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2 - 2)x = a(a^2 - b^2) \qquad (1)$$

Biện luận :

* Nếu $a^2 - b^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - x = b^2$

Phương trình (1) trở thành $0x = 2a$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) VN (vì $a^2 = b^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$).

* Nếu $a^2 - b^2 - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2 \neq b^2$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - 2}.$$

Kết luận

$a^2 - b^2 - 1 = 0$ phương trình (1) VN.

$a^2 - b^2 - 2 \neq 0$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - 2}$.

Bài 7

Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $\dfrac{2x - m}{x - 2} = m - 1$ (m là tham số)

b) $\dfrac{2a - 1}{x - 1} = a - 2$ (a là tham số).

Giải

a) $\dfrac{2x - m}{x - 2} = m - 1$ (a)

Điều kiện $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$$\begin{aligned}(a) &\Leftrightarrow 2x - m = (m - 1)(x - 2)\\ &\Leftrightarrow 2x - m = mx - 2m - x + 2\\ &\Leftrightarrow (3 - m)x = 2 - m \text{ (a')}.\end{aligned}$$

Biện luận phương trình (a')

* Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Phương trình (a') trở thành $0x = -1 \Rightarrow$ Phương trình (a') VN.

* Nếu $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Phương trình (a') $\Leftrightarrow x = \dfrac{2 - m}{3 - m}$

$x = \dfrac{2 - m}{3 - m}$ là nghiệm của phương trình (a) $\Leftrightarrow \dfrac{2 - m}{3 - m} \neq 2$

$$\Leftrightarrow 2 - m \neq 6 - 2m$$

$$\Leftrightarrow m \neq 4.$$

Kết luận : $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 4 \end{array}\right.$ phương trình (a) VN.

$\begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$ phương trình (a) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2 - m}{3 - m}$.

b) $\dfrac{2a - 1}{x - 1} = a - 2$ (b)

Điều kiện $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Phương trình (b) $\Leftrightarrow$ $(2a-1) = (a-2)(x-1)$

$\Leftrightarrow$ $2a - 1 = (a-2)x - (a-2)$

$\Leftrightarrow$ $(a-2)x = 3(a-1)$ (b')

Biện luận phương trình (b')

* Nếu $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Phương trình (b') trở thành $0x = 3$ $\Rightarrow$ Phương trình (b') VN.

* Nếu $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$

Phương trình (b') $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{3(a-1)}{a-2}$

$x = \dfrac{3(a-1)}{a-2}$ là nghiệm của phương trình (b) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{3(a-1)}{a-2} \neq 1$

$\Leftrightarrow$ $3a - 3 \neq a - 2$

$\Leftrightarrow$ $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Kết luận : $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ phương trình (b) VN.

$\left\{\begin{array}{l} a \neq 2 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ phương trình (b) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3(a-1)}{a-2}$.

Bài 8

Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2} \qquad (1)$$

trong đó a, b là tham số.

Giải

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} x + a \neq 0 \\ x - a \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq -a \\ x \neq a \end{array}\right.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(x-a)(x+a+b) = (x+a)(x+a-b) - (a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + bx - a^2 - ba = x^2 + (2a - b)x + a^2 - ab - a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow \quad 2(a - b)x = -(x^2 - b^2) \qquad (2)$

Biện luận phương trình 2

* Nếu $a - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$

Phương trình (2) trở thành $0x = 0$ (thỏa $\forall x \in R$)

$\Rightarrow$ phương trình (2) VN, $x \in R$.

* Nếu $a - b \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq b$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{a^2 - b^2}{2(a - b)}$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{a + b}{2}$$

$x = -\dfrac{a+b}{2}$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a+b}{2} \neq a \\ -\dfrac{a+b}{2} \neq -a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3a \neq b \\ b \neq +a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b \neq -3a.$$

Kết luận : $b = a$ (1)VSN, $x \in R\backslash\{\pm a\}$.

$b = -3a$ (1)VN.

$\begin{cases} b \neq a \\ b \neq -3a \end{cases}$ (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{a+b}{2}$.

Bài 9

Cho phương trình : $(m - 2)x = n - 1 \quad (1)$ (m, n là tham số).

Với giá trị nào của m, n thì :

a) Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

b) Phương trình (1) VN

c) Phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in R$.

Giải

a) Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \quad m - 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad m \neq 2.$$

b) Phương trình (1) VN $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ n - 1 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n \neq 1 \end{cases}.$$

c) Phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in R$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ n - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}.$$

Bài 10

Định m để phương trình sau có tập nghiệm là R

$$(m^2 + 2m - 3)x = m - 1 \qquad (1)$$

Giải

(1) có tập nghiệm là R $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = -3 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 1$$

Kết luận : $m = 1$.

Bài 11

Định m để phương trình :

$$(mx + 2)(x + 1) = (mx + m^2)x \qquad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \quad mx^2 + mx + 2x + 2 = mx^2 + m^2x$

$$\Leftrightarrow \quad (m^2 - m - 2)x$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \quad m^2 - m - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết luận : $m \neq -1$ và $m \neq 2$.

Bài 12

Định a để phương trình : $\dfrac{2x^2 - a}{x - a} = x + 1$ (1)

có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện $x \neq a$

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2x^2 - a = (x + 1)(x - a) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - a = x^2 - ax + x - a \\
&\Leftrightarrow x^2 + ax - x = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x + a - 1) = 0 \qquad (2) \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 - a \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng một nghiệm khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq a \\ 1 - a = a \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 0 = a \\ 1 - a \neq a \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1 - a = 0 \\ 0 \neq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ hay } a = 0 \text{ hay } a = 1.$$

Kết luận : $a = 0 \vee a = \dfrac{1}{2} \vee a = 1.$

Bài 13

Định m để phương trình :

$$\frac{2x + m}{\sqrt{x - 1}} - 4\sqrt{x - 1} = \frac{x - 2m + 3}{\sqrt{x - 1}} \qquad \text{(1) có nghiệm.}$$

Giải

Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2x + m - 4(x - 1) = x - 2m + 3 \\
&\Leftrightarrow 3x = 3m + 1 \\
&\Rightarrow x = \frac{3m + 1}{3} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3m+1}{3} > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3m + 1 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad m > \frac{2}{3}$$

Kết luận : $m > \frac{2}{3}$.

Bài 14

Giải các phương trình sau đây :

a) $3x - 2y = 5$ **b)** $2x + y = 0$.

Giải

a) * $3x - 2y = 5 \Leftrightarrow 2y = 3x - 5$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$.

* Hoặc $3x - 2y = 5 \Leftrightarrow 3x = 2y + 5$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} y \in R \\ x = \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \end{cases}$.

b) * $2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$

Vậy phương trình đã cho có VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = -2x \end{cases}$.

* Hoặc $2x + y = 0 \Leftrightarrow 2x = -y$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{y}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} y \in R \\ x = -\frac{y}{2} \end{cases}$.

Bài 15

Cho phương trình : $m(m-2)x + (m^2-4)y + m + 2 = 0$ (1)

Định m để :

a) Phương trình VN.

b) Phương trình nhận $(1, -1)$ làm nghiệm.

c) Phương trình có tập hợp nghiệm là

$$S = \left\{(x, y) \middle| x \in R \text{ và } y = \frac{-3x-5}{5}\right\}.$$

Giải

a) Định m để phương trình VN :

$$\text{Phương trình (1) VN} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m(m-2) = 0 \\ b = m^2 - 4 = 0 \\ c = m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \vee m = 2 \\ m = 2 \vee m = -2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 2$$

Vậy : $m = 2$.

b) Định M để $(1, -1)$ là nghiệm của phương trình (1)

$(1, -1)$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \quad m(m-2) + (m^2-4)(-1) + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - 2m - m^2 + 4 + m + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 6$$

Vậy : $m = 6$.

c) Định m để tập hợp nghiệm của (1) là

$$S = \left\{(x, y) \middle| x \in R \text{ và } y = \frac{-3x-5}{5}\right\}.$$

* Tập S có thể viết dưới dạng $S = \{(x, y) / x \in R \text{ và } 5y = -3x - 5\}$.

Mặt khác, (1) $\Leftrightarrow$ $(m^2 - 4)y = -m(m - 2)x - m - 2$

Do đó, S là tập nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m^2 - 4}{5} = \dfrac{-m(m - 2)}{-3} = \dfrac{-(m + 2)}{-5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = m + 2 \\ 5(m - 2)m = 3(m + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 = 0 \\ 5m^2 - 13m - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \vee m = -2 \\ 5m^2 - 13m - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 3$$

Vậy : $m = 3$.

Bài 16

Giải phương trình : $2x - 3y = 5$ với $x, y \in N$.

Giải

$$2x - 3y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3y + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 2 + \frac{y + 1}{2}$$

Ta có : $x_1y \in N$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x, y \in N \\ \dfrac{y + 1}{2} \in N \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in N \\ \dfrac{y + 1}{2} = t, t \in N^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in N^* \\ y = 2t - 1 \Rightarrow x = 3t + 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có VSN (x, y) thỏa bài toán định bởi :

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in N^*).$$

Bài 17

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $5x + 3y = 46$.

Giải

$$5x + 3y = 46 \Leftrightarrow 3y = 46 - 5x$$

$$\Leftrightarrow y = 15 - 2x + \frac{1 + x}{3}$$

$$\text{Ta có : } x, y \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in Z \\ \dfrac{1 + x}{3} \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in Z \\ \dfrac{1 + x}{3} = t, t \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, t \in Z \\ x = -1 + 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, t, y \in Z \\ x = 3t - 1 \Rightarrow y = 15 - 2(3t - 1) + t = 17 - 5t \end{cases}$$

Bài 18

Cho 2 phương trình : $4x + y = 5$ (1)

$3x - 6y = 1$ (2)

a) Giải (1), giải (2).

b) Tìm nghiệm chung của (1) và (2).

Giải

a) Giải (1), giải (2)

* (1) $\Leftrightarrow y = 5 - 4x$

Vậy (1) có VSN (x, y), định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 5 - 4x \end{cases}$.

* (2) $\Leftrightarrow y = \dfrac{3x - 1}{6}$

Vậy (2) có VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{3x - 1}{6} \end{cases}$.

b) Tìm nghiệm chung của (1) và (2) :

(x, y) là nghiệm chung của (1) và (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x = \dfrac{3x - 1}{6} \\ y = 5x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{27} \\ y = \dfrac{11}{27} \end{cases}$$

Vậy nghiệm chung của (1) và (2) là : $\begin{cases} x = \dfrac{31}{27} \\ y = \dfrac{11}{27} \end{cases}$.

Bài 19

Cho phương trình : $(m - 1)x + 2my - 3m + 4 = 0$ (1)

a) Định m để (0, +1) là nghiệm của (1).

b) Có giá trị nào của m để (1) VN hay không ?

c) Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất 1 cặp số (x_0, y_0) là nghiệm của mọi phương trình (1) khi m thay đổi.

Giải

a) Định m để (0, +1) là nghiệm của (1)

(0, –1) là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$ $(m - 1)0 + 2m\ 1 - 3m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $-m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = 4$

Vậy m = 4.

b) Có giá trị nào của m để (1) VN hay không ?

$$\text{(1) VN} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 = 0 \\ b = 2m = 0 \\ c = -3m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \text{ VN} \\ m \neq \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) VN.

c) Chứng tỏ rằng tồn tại 1 cặp (x_0, y_0) là nghiệm của mọi phương trình (1) khi m thay đổi.

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $m(x + 2y - 3) + (-x + 4) = 0$

(x_0, y_0) là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$ $m(x_0 + 2y_0 - 3) + (-x_0 + 4) = 0$

(x_0, y_0) là nghiệm của mọi phương trình (1) khi m thay đổi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 - 3 = 0 \\ -x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Bài 20

Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ x + y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$

thử lại bằng phương pháp đồ thị.

Giải

Cách 1 :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Cách 2 : Dùng phương pháp thế

Từ (2) $\Rightarrow$ $y = 3 - x$ (*)

Thay (*) vào (1) ta được : $4x - (3 - x) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - 3 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

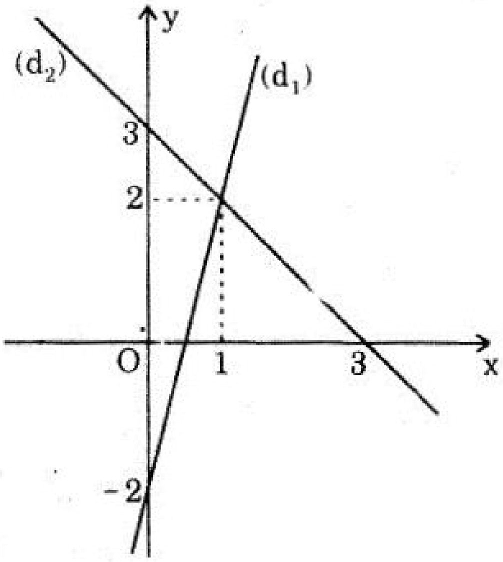
Thay $x = 1$ vào (*) ta được $y = 3 - 1 = 2$

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

* Thử lại bằng phương pháp đồ thị :

Vẽ 2 đường thẳng (d_1) $4x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 2$

(d_2) $x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - x$



Dựa vào đồ thị ta thấy, giao điểm của (d_1) và (d_2) là điểm A(1, 2).

Vậy thì phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 21

Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 4x + 3y - 18 = 0 \\ 3x + 5y - 19 = 0 \end{cases}$

bằng phương pháp Cramer.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4.5 - 3.3 = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -18 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = 3(-19) - 5(-18) = 33$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -18 & 4 \\ -19 & 3 \end{vmatrix} = -18.3 - (-19)(4) = 22$$

Vì D = 11 ≠ 0 hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{33}{11} = 3 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{22}{11} = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 22

Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 & (1) \\ |x-1| + 3y = 3 & (2) \end{cases}$

Giải

Cách 1 :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Từ phương trình (2)} \rightarrow \ |x-1| = 3-3y \quad (*) \\ &\text{Mà} \quad |x-1| \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 3(1-y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |y-2| = 2-y$$

Thay (*) vào phương trình (1) ta được :

$$3 - 3y + 2 - y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad +4y = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1$$

Thay y = 1 vào phương trình (*) ta được :

$$|x-1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Vậy hệ phương trình (1) có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Cách 2 :

Từ phương trình (2) → $|x-1| = 3-3y$ (*)

Thay (*) vào phương trình (1) ta được :

$$3 - 3y + |y-2| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y-2| = 3y-2 \qquad (3)$$

* Nếu $y \geq 2$

$$(3) \Leftrightarrow \quad y = 2 = 3y - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{loại (vì } y \geq 2\text{).}$$

* Nếu $y < 2$

$$(3) \Leftrightarrow \quad 2 - y = 3y - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1$$

Thay y = 1 vào (*) ta được :

$$|x-1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Vậy hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Bài 23

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$(\text{I})\ \begin{cases} mx + y = (m+1) \\ x + my = 2 \end{cases}.$$

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y - (m+1) = 0 \\ x + my - 2 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -(m+1) \\ m & -2 \end{vmatrix} = -2 + m(m+1) = m^2 + m - 2 =$$

$$= (m-1)(m+2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -(m+1) & m \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -m - 1 + 2m = m - 1$$

Biện luận

* $D = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$

- Nếu m = 1

  Hệ (I) thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$

$\Rightarrow$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x \end{cases}.$

- Nếu m = −1

  Hệ (I) thành $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ (I) VN.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}.$

Kết luận

$m = 1$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x \end{cases}$.

$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$.

Bài 24

Định m để hệ sau có VSN

$$\begin{cases} m^2x + (m+1)y = m + 2 \\ 2mx + (m+3)y = 6 \end{cases}.$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} m^2 & m+1 \\ 2m & m+3 \end{vmatrix} = m^2(m+3) - 2m(m+1) = m[m^2 + 3m - 2m - 2]$$

$$= m(m^2 + m - 2)$$

$$= m(m-1)(m+2)$$

Giả sử hệ (I) VSN $\Rightarrow$ $D = 0$

$$\Leftrightarrow \quad m(m-1)(m+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Thử lại

- Khi $m = 0$

  Hệ (I) thành : $\begin{cases} 0x + y = 2 \\ 0x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 2$

  Vậy hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 \end{cases}$.

  $\Rightarrow$ Nhận $m = 0$.

- Khi $m = 1$

  Hệ (I) thành : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3 - x}{2}$$

Vậy hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{3 - x}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Nhận m – 1.

- Khi $m = -2$

Hệ (I) thành : $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -4x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \\ 4x + y = -6 \end{cases}$

Vậy hệ (I) VN.

$\Rightarrow$ Loại $m = -2$.

Kết luận : $m = 0 \vee m = 1$.

Bài 25

Định a, b để hệ sau VN : (I) $\begin{cases} ax + by + 2 = 0 \\ 6x + 3by + a - b = 0 \end{cases}$.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ 6 & 3b \end{vmatrix} = 3ab - 6b = 3b(a - 2b)$$

* Giả sử hệ (I) VN $\Rightarrow$ $D = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3b(a - 2b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2b(\neq 0) \end{array}\right.$$

* *Thử lại :*

- Khi $b = 0$

Hệ (I) thành : $\begin{cases} ax + 2 = 0 \\ 6x + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} ax + 2 = 0 \\ x = -\dfrac{a}{6} \end{cases}$

Hệ (I) VN $\Leftrightarrow$ hệ (II) VN.

$\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{a}{6}$ không là nghiệm của phương trình $ax + 2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \quad a\left(-\frac{a}{6}\right) + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 + 12 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq \pm 2\sqrt{3}.$$

- Khi $a = 2b(\neq 0)$

Hệ (I) thành : $\begin{cases} 2bx + by + 2 = 0 \\ 6x + 3by + b = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2bx + 3by + 6 = 0 \\ 6x + 3by + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (III) \begin{cases} 6(b - 1)x + 6 - b = 0 \quad (*) \\ 6x + 3by + b = 0 \end{cases}$$

Hệ (I) VN $\Leftrightarrow$ Hệ (III) VN

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) VN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(b - 1) = 0 \\ 6 - b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Vậy : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a \neq \pm 2\sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases}$.

Bài 26

Giải và biện luận hệ phương trình : (I) $\begin{cases} ax + by = \quad + 1 \\ bx + ay = b + 1 \end{cases}$.

Giải

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by - (a + 1) = 0 \\ bx + ay - (b + 1) = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b & -(a + 1) \\ a & -(b + 1) \end{vmatrix} = -b(b + 1) + a(a + 1) = a^2 - b^2 + a \quad b =$$

$$= (a - b)(a + b + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -(a + 1) & a \\ -(b + 1) & b \end{vmatrix} = -(a + 1)b + a(b + 1) = a - b$$

Biện luận :

* $D = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

- $a = b$

  Hệ (I) thành $\begin{cases} ax + ay = a + 1 \\ ax + ay = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad ax + ay = a + 1$

- Nếu $a \neq 0$

  Phương trình (*) $\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{a + 1 - ax}{a} = 1 - x + \dfrac{1}{a}$

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x + \dfrac{1}{a} \end{cases}$.

- Nếu $a = 0$

  Phương trình (*) thành : $0x + 0y = 1$

  $\Rightarrow$ phương trình (*) VN

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VN.

- $a = -b$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} ax - ay = a + 1 \\ -ax + ay = -a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - ay = a + 1 \\ ax + ay = a - 1 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VN.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(a + b + 1)(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{a + b + 1}{a + b} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \dfrac{1}{a + b} \end{cases}$.

Kết luận

- $\left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = -b \end{array}\right.$ Hệ (I) VN.

- $a = b \neq 0$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x + \dfrac{1}{a} \end{cases}$.

- $\begin{cases} a \neq b \\ a \neq -b \end{cases}$ Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{a + b + 1}{a + b} \\ y = \dfrac{1}{a + b} \end{cases}$.

Bài 27

Tìm m, n để 2 hệ phương trình sau đây cùng VN

$$(I)\begin{cases}(m+1)x+(n+1)y=5n-1\\(m-1)x+ny=2\end{cases}$$

$$(II)\begin{cases}(m+1)x+my=n\\3x+(4-m)y=2n-1\end{cases}$$

Giải

Xét hệ (I) có $D_I = \begin{vmatrix}m+1 & n+1\\ m-1 & n\end{vmatrix}$

$$= (m+1)n-(m-1)(n+1$$

$$= mn+n-mn-m+n+1$$

$$= 2n-m+1$$

Xét hệ (II) có $D_{II} = \begin{vmatrix}m+1 & m\\ 3 & 4-m\end{vmatrix}$

$$= (m+1)(4-m)-3m$$

$$= 4m-m^2+4-m-3m$$

$$= m^2+4$$

* Giả sử 2 hệ (I), (II) đều VN

$$\Rightarrow \begin{cases}D_I=0\\D_{II}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n-m+1=0\\-m^2+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m=\pm 2\\n=\dfrac{m-1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\n=\dfrac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}m=-2\\n=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

* *Thử lại*

- $\begin{cases}m=2\\n=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Hệ (I) thành : $\begin{cases}3x+\dfrac{3}{2}y=\dfrac{3}{2}\\x+\dfrac{1}{2}y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=1\\2x+y=4\end{cases} \Leftrightarrow$ hệ (I) VN.

Hệ (II) thành : $\begin{cases} 3x + 2y = \dfrac{1}{2} \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ (II) VN.

Nhận $\begin{cases} m = 2 \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\begin{cases} m = -2 \\ n = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Hệ (I) thành : $\begin{cases} -x - \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{17}{2} \\ -3x - \dfrac{3}{2}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 17 \\ 2x + y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ hệ (I) VN.

Hệ (II) thành : $\begin{cases} -x - 2y = -\dfrac{3}{2} \\ 3x + 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x + 2y = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow$ hệ (II) VN.

Nhận $\begin{cases} m = -2 \\ n = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Kết luận : $\begin{cases} m = 2 \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} m = -2 \\ n = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Bài 28

Định m để hệ phương trình có VSN

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} 2(m + 2)x - (5m + 3)y - 2(m - 2) = 0 \\ (m + 2)x - 3my - (m - 2) = 0 \end{cases}$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 2(m + 2) & -(5m + 3 \\ (m + 2) & -3m \end{vmatrix} = -6n(m + 2) + (m + 2)(5m + 3)$$

$D = (m + 2)(-6m + 5m + 3)$

$= (m + 2)(-m + 3)$

Giả sử hệ phương trình (I) VSN $\Rightarrow D = 0$

$\Leftrightarrow (m + 2)(-m + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Thử lại :

- Khi $m = -2$

Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 0x + 7y + 8 = 0 \\ 0x + 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ (I) VN

$\Rightarrow$ Loại $m = -2$.

- Khi $m = 3$

Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 10x - 18y - 2 = 0 \\ 5x - 9y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 9y - 1 = 0 \\ 5x - 9y - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ hệ (I) VSN

$\Rightarrow$ Nhận $m = 3$.

Kết luận : $m = 3$.

Bài 29

Cho hệ phương trình (I) $\begin{cases} mx + y - 2m = 0 \\ x + my - (m + 1) = 0 \end{cases}$

a) Định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất (x, y). Tìm hệ thức giữa nghiệm x, y độc lập đối với m.

b) Định m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2m \\ m & -(m + 1) \end{vmatrix} = -m - 1 + 2m^2 = (2m + 1)(m - 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2m & m \\ -(m + 1) & 1 \end{vmatrix} = -2m + m(m + 1) = m(m + 1 - 2) = m(m - 1)$$

a) Định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất :

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Khi đó, gọi (x, y) là nghiệm của hệ (I).

Ta có : $\begin{cases} mx + y - 2m = 0 \\ x + my - (m + 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(x - 2) + y = 0 \\ m(y - 1) + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(x - 2)(y - 1) + y(y - 1) = 0 \\ m(x - 2)(y - 1) + (x - 1)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) - y(y - 1) = 0$$

Đây chính là hệ thức giữa nghiệm x, y độc lập đối với m.

b) Định m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m = 1 \end{cases}$ hệ (I) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(m - 1)(2m + 1)}{(m - 1)(m + 1)} = \dfrac{2m + 1}{m + 1} = 2 - \dfrac{1}{m + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m(m - 1)}{(m - 1)(m + 1)} = \dfrac{m}{m + 1} = 1 - \dfrac{1}{m + 1} \end{cases}$$

Do đó $m \in Z$ để $x, y \in Z$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m \in Z \\ \dfrac{1}{m + 1} \in Z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 1 = -1 \\ m + 1 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 0 \end{array}\right.$$

So với điều kiện $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta nhận $m = -2 \vee m = 0$.

Vậy : $m = -2 \vee m = 0$.

Bài 30

1. Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình sau :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 6ax + (2 - a)y - 3 = 0 \\ (a - 1)x - ay - 2 = 0 \end{cases}$$

2. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ đó. Tìm một hệ thức giữa x và y độc lập đối với tham số a.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 6a & 2-a \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = -6a^2 + (a-2)(a-1) =$$

$$= -5a^2 - 3a + 2 = -(a+1)(5a-2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2-a & -3 \\ -a & -2 \end{vmatrix} = -2(2-a) - 3a = -4 + 2a - 3a = -a - 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -3 & +6a \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = -3(a-1) + 12a = 9a + 3 = 3(3a+1)$$

* $D = 0 \Leftrightarrow (a+1)(5a-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

- $a = -1$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} -6x + 3y - 3 = 0 \\ -2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ -2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ hệ (I) VN.

- $a = \dfrac{2}{5}$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} \dfrac{12}{5}x + \dfrac{8}{5}y - 3 = 0 \\ -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{2}{5}y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 8y - 15 = 0 \\ 12x + 8y - 40 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ hệ (I) VN.

* $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{2}{5} \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-a - 4}{-(a + 1)(5a - 2)} = \dfrac{a + 4}{(a + 1)(5a - 2)} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3(3a + 1)}{-(a + 1)(5a - 2)} = \dfrac{3(a + 1)}{(a + 1)(2 - 5a)} \end{cases}$$

Kết luận :

- $a = -1 \vee a = \dfrac{2}{5}$: hệ (I) VN.
- $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{2}{5} \end{cases}$ hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{a + 4}{(5a - 2)(a + 1)} \\ y = \dfrac{-3(3a + 1)}{(5a - 2)(a + 1)} \end{cases}$.

2. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ (I)

Ta có : $\begin{cases} 6ax + (2 - a)y - 3 = 0 \\ (a - 1)x - ay - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(6x - y) - 3 + 2y = 0 \\ a(x - y) - (x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(6x - y)(x - y) + (2y - 3)(x - y) = 0 \\ a(x - y)(6x - y) - (x + 2)(6x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (2y - 3)(x - y) + (x + 2)(6x - y) = 0$$

Đây là hệ thức độc lập giữa các nghiệm đối với tham số a cần tìm.

Bài 31

Cho hệ phương trình (I) $\begin{cases} mx + my - m = 0 \\ mx + y - 2m = 0 \end{cases}$

a) Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình (I).

b) Trong trường hợp hệ phương trình cóo nghiệm duy nhất, hãy tìm giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn điều kiện $x > 0$, $y < 0$.

Giải

a) Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình (I)

$$D = \begin{vmatrix} m & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = m - m^2 = m(1 - m)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -m \\ 1 & -2m \end{vmatrix} = m(-2m) + m = m(1 - 2m)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -m & m \\ -2m & m \end{vmatrix} = m^2$$

Biện luận :

$$D = 0 \Leftrightarrow \quad m(1 - m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

- $m = 0$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 0 \end{cases}$.

- $m = 1$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VN.

$$D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m(1 - 2m)}{m(1 - m)} = \dfrac{2m - 1}{m - 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^2}{m(1 - m)} = \dfrac{m}{1 - m} \end{cases}$.

Kết luận :

- $m = 0$ hệ (I) VSN định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = 0 \end{cases}$.
- $m = 1$ hệ (I) VN.
- $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m - 1}{m - 1} \\ y \quad \dfrac{m}{1 - m} \end{cases}$.

b) Theo câu a) ta có :

Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m-1}{m-1} \\ y = \dfrac{m}{1-m} \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-1}{m-1} > 0 \\ \dfrac{m}{1-m} < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \vee m > 1 \\ m < 0 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 1$

Kết luận : $m < 0 \vee m > 1$.

Bài 32

Định m $\in$ Z để hệ phương trình sau đây có nghiệm nguyên

$$(I) \quad \begin{cases} mx + y - 3 = 0 \\ x + my - 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ m & -2m-1 \end{vmatrix} = -2m - 1 + 3m = m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -3 & m \\ -2m-1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2m^2 + m = (m-1)(2m+3)$$

Biện luận :

* $D = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

- $m = -1$

  Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} -x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Hệ (I) VN.

$\Rightarrow$ Hệ (I) không thể có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Loại $m = -1$.

- $m = 1$

Hệ (I) trở thành : $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x + y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 3 - x$

$\Rightarrow$ Hệ (I) VSN (x, y) định bởi : $\begin{cases} x \in R \\ y = 3 - x \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm nguyên $(x, 3 - x)$ với $x \in Z$.

$\Rightarrow$ Nhận $m = 1$.

$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(m-1)(2m+3)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{2m+3}{m+1} = 2 + \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} m \in Z \\ \dfrac{1}{m+1} \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 1 = -1 \\ m + 1 = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 0 \end{array}\right.$

So với điều kiện $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta nhận $m = -2 \vee m = 0$.

Kết luận : $m = -2 \vee m = 0 \vee m = 1$.

Bài 33

Giả sử hệ phương trình : $(I)\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Giải

Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ (I)

Ta có : $\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ bx_0 + cy_0 = a \\ cx_0 + ay_0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2bx_0 + ab^2y_0 = abc \\ b^2cx_0 + bc^2y_0 = abc \\ c^2ax_0 + a^2cy_0 = abc \end{cases}$

Cộng theo vế 3 đẳng thức ta được :

$$a^2(bx_0 + cy_0) + b^2(cx_0 + ay_0) + c^2(ax_0 + by_0) = 3abc$$

$$\Rightarrow \quad a^2a + b^2b + c^2c = 3abc$$

$$\Rightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm).}$$

Bài 34

Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$

a) Với b = 0, biện luận nghiệm của hệ phương trình theo a và c.

b) Tìm b để với mọi a, ta luôn tìm được c để hệ phương trình có nghiệm.

c) Tìm b để tồn tại c sao cho hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

Giải

a) Với b = 0, hệ đã cho trở thành : (II) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ x + ay - (c^2 + c) = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & -(c^2 + c) \end{vmatrix} = -c^2 - c = -c(c + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -(c^2 + c) & 1 \end{vmatrix} = -a(c^2 + c) = -ac(c + 1)$$

* $D = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$

Hệ (II) thành : $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y - (c^2 + c) = 0 \end{cases}$

- Nếu $c^2 + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

Hệ (II) thành : $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x$

$\Rightarrow$ Hệ (II) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = x \end{cases}$.

- Nếu $\begin{cases} c \neq 0 \\ c \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad c^2 + c \neq 0 \quad \Rightarrow$ Hệ (II) VN.

- Khi a = 1

Hệ (II) thành $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - (c^2 + c) = 0 \end{cases}$

- Nếu $c^2 + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

Hệ (II) thành $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x$

$\Rightarrow$ Hệ (II) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = -x \end{cases}$.

- Nếu $\begin{cases} c \neq 0 \\ c \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad c^2 + c \neq 0 \quad \Rightarrow$ Hệ (II) VN.

$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Hệ (II) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-(c^2 + c)}{a^2 - 1} = \dfrac{c^2 + c}{1 - a^2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-a(c^2 + c)}{a^2 - 1} = \dfrac{a(c^2 + c)}{1 - a^2} \end{cases}$.

Kết luận : Với b = 0, ta có :

- $a \neq \pm 1$ Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{c^2 + c}{1 - a^2} \\ y = \dfrac{a(c^2 + c)}{1 - a^2} \end{cases}$.

- $a = \pm 1$ và $c \neq 0$ và $c \neq -1$ thì hệ (I) VN.
- $a = 1$ và $c = 0$ hay $c = -1$ thì hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = -x \end{cases}$.
- $a = -1$ và $c = 0$ hayc $= -1$ thì hệ (I) VSN (x, y) định bởi $\begin{cases} x \in R \\ y = x \end{cases}$.

2. Tìm b để với mọi a ta luôn tìm được c để hệ phương trình (I) có nghiệm

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

* Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất với mọi c, nên không cần đặt điều kiện cho b.

* Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$

- $a = 1$

  Hệ (I) thành $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = c^2 + c \end{cases}$

  Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 + c = b \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0$

  Do đó c tồn tại $\Leftrightarrow \Delta_1 = 1 + ab \geq 0$

  $\Leftrightarrow b \geq \frac{1}{4}$.

- Nếu $a = -1$

  Hệ (I) trở thành $\begin{cases} -x + y = b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}$

  Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 + c = -b \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0$

  Do đó c tồn tại $\Leftrightarrow \Delta_2 = 1 - 4b \geq 0$

  $\Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$.

Tóm lại $\forall a$, luôn tồn tại c để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$.

3. Tìm b để tồn tại c sao cho hệ phương trình có nghiệm với mọi a.

Tồn tại c để hệ phương trình (I) có nghiệm với mọi a ⇔ hai phương trình

$$c^2 + c - b = 0 \qquad (1)$$

$$c^2 + c + b = 0 \qquad (2)$$

* Giả sử c_0 là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2).

Khi đó, ta có hệ $\begin{cases} c_0^2 + c_0 - b = 0 \\ c_0^2 + c_0 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad b = 0.$

* Với b = 0, hai phương trình (1) và (2) trở thành $c^2 + c = 0$. Rõ ràng chúng có nghiệm chung là c = 0 và c = −1.

Vậy b = 0.

Bài 35

Xác định a sao cho hệ phương trình dưới đây có nghiệm :

$$(\text{I}) \begin{cases} x + (1 + a)y = 0 & (1) \\ (1 - a)x + ay = a + 1 & (2) \\ (1 + a)x + (12 - a)y = -(a + 1) & (3) \end{cases}$$

Giải

* *Điều kiện cần :*

Giả sử khi (I) có nghiệm

$$\rightarrow \text{hệ (II)} \begin{cases} x + (1 + a)y = 0 & (1) \text{ có nghiệm} \\ (1 - a)x + ay = a + 1 & (2) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 + a \\ 1 - a & a \end{vmatrix} = a - (1 - a^2) = a - 1 + a^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 + a & 0 \\ a & -(1 + a) \end{vmatrix} = -(1 + a)^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + a) & 1 - a \end{vmatrix} = 1 + a$$

* $D = 0 \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad D_x \neq 0$

Do các hệ số của ẩn không đồng thời bằng 0 nên hệ (II) VN.

Loại $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

* $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ a \neq \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Hệ (II) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-(1+a)^2}{a^2 + a - 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{a + 1}{a^2 + a - 1} \end{cases}$.

* *Điều kiện đủ :* Với $a \neq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Hệ (I) có nghiệm ⇔ nghiệm của hệ (II) phải thỏa mãn phương trình (3)

$$\Leftrightarrow -\frac{(1+a)^3}{a^2 + a - 1} + \frac{(12 - a)(a + 1)}{a^2 + a - 1} = -(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + a = 0 \\ \dfrac{(1+a)^3}{a^2 + a - 1} + \dfrac{a - 12}{a^2 + a - 1} = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a^2 + 2a + 1 + a - 12 = a^2 + a - 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ 2a - 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 5 \end{array}\right.$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. PHƯƠNG TRÌNH

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm ?

A. $3x^2\ x^2 + 5 = -2\sqrt{x - 1}$ B. $x^2 - 3\sqrt{1 - x} = 4 + \sqrt{x - 5}$

C. $x^2 + 2 = \sqrt{x + 4}$ D. $x^2 + 4x + 6 = 0$.

2. Cho phương trình : $x_2 + x = 0$ (1).

Trong các phương trình sau đây, phương trình nào tương đương với phương trình (1).

A. $\frac{3x}{x - 1} + x = 0$ B. $x + 1 = 0$

C. $x_2 + (x + 1)^2 = 0$ D. $\frac{2x}{x - 1} + x = 0$.

3. Cho phương trình : $2x^2 - x = 0$.

Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình (1).

A. $2x \quad \frac{x}{1 - x} = 0$ B. $4x^3 - x = 0$

C. $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0$ D. $x^2 - 2x + 1 = 0$.

4. Để giải phương trình : $|x - 2| = 2x - 3$ (1).

Một học sinh làm qua các bước sau :

(I) Bình phương hai vế :

(1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$ (2)

(II) (2) $\Leftrightarrow$ $3x^2 - 8x + 5 = 0$ (3)

(III) (3) $\Leftrightarrow$ $x = 1 \vee x = \frac{5}{3}$

(IV) Vậy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{5}{3}$

Cách giải trên sai từ bước nào ?

A. (I) B. (II) C. (III) D. (IV).

5. Cho phương trình : $f_1(x) = g_1(x)$ (1)

$f_2(x) = g_2(x)$ (2)

$f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$ (3)

Trong các phát biểu sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. (3) tương đương với (1) hoặc (2)

B. (3) là hệ quả của (1)

C. (2) là hệ quả của (3)

D. Các phát biểu A, B, C đều có thể sai.

6. Trong các phương trình sau tìm phương trình vô nghiệm ?

A. $|2x + 3| = 1$ B. $x^4 + x + 2 = 0$

C. $x^4 + x^3 + x^2 = 0$ D. $x^5 + x + 2 = 0$.

7. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm : $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

8. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm : $|x| = -x$

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. Cho phương trình : $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ (1).

Với giá trị nào của m thì (1) vô nghiệm x ?

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. $m = 0$ D. $m \neq \pm 3$.

2. Cho phương trình : $(m^2 - 4)x = m(m + 2)$ (1).

Với giá trị nào của m thì (1) có tập nghiệm là R ?

A. $m = -2$ B. $m = 2$ C. $m = 0$ D. $m \neq \pm 2$.

3. Cho phương trình : $\dfrac{2mx - 1}{x + 1} = 3$ (1).

Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm x ?

A. $m \neq \dfrac{3}{2}$ B. $m \neq 0$

C. $m \neq \dfrac{3}{2}$ và $m \neq 0$ D. $m \neq \dfrac{3}{2}$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

4. Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm x :

$$mx - m = 0.$$

A. $\varnothing$ B. $\{0\}$ C. R^+ D. R .

5. Cho phương trình 2 ẩn x, y : $ax + by = c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là :

A. $a \neq 0$ và $b \neq 0$ B. $c \neq 0$

C. $a \neq 0$ hay $b \neq 0$ D. $a.b.c \neq 0$.

6. Cho phương trình 2 ẩn x, y : $ax + by = c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Với điều kiện nào của a, b, c thì tập hợp các nghiệm (x, y) của phương trình trên là đường thẳng đi qua gốc tọa độ ?

A. $c = 0$ B. $a = 0$

C. $b = 0$ D. $c = 0$ và $a.b \neq 0$.

7. Cho phương trình 2 ẩn x, y : $ax + by = c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Với điều kiện nào của a, b, c thì tập hợp các nghiệm (x, y) của phương trình trên là đường thẳng song song Ox ?

A. $a = 0$ B. $b = 0$

C. $a = 0$ và $c \neq 0$ D. $b = 0$ và $c \neq 0$.

8. Cho phương trình 2 ẩn x, y : $ax + by = c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Với điều kiện nào của a, b, c thì tập hợp các nghiệm (x, y) của phương trình trên là đường thẳng song song Oy ?

A. $a = 0$ và $c \neq 0$ B. $b = 0$ và $c \neq 0$

C. $a = 0$ D. $b = 0$.

9. Cho phương trình : $|x - 2| = 2 - x$ (1).

tập hợp các nghiệm của phương trình (1) là tập hợp nào sau đây ?

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[2, +\infty)$ D.

10. Phương trình : $|2x - 4| + |x - 1| = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

11. Phương trình : $|5x + 2| = -|5x = 2|$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

12. Phương trình : $|2x - 4| - 2x + 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. Tìm nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$.

A. $\left(\frac{17}{23}, -\frac{7}{23}\right)$ B. $\left(-\frac{17}{23}, \frac{7}{23}\right)$

C. $\left(-\frac{17}{23}; -\frac{7}{23}\right)$ D. $\left(\frac{17}{23}; \frac{7}{23}\right)$.

2. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm (x, y) : $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ -2x + 4y = -3 \end{cases}$.

A. Vô số B. 1 C. 2 D. 0.

3. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm (x, y) : $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

4. Tập hợp các nghiệm (x, y) của hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases}$.

là tập hợp nào sau đây ?

A. Một đường thẳng B. Toàn bộ mặt phẳng Oxy

C. Nửa mặt phẳng D. ∅.

5.

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn

Hỏi có mấy con gà, có mấy con chó ?

A. 14 gà 22 chó B. 22 gà 14 chó

C. 16 gà 20 chó D. 24 gà 12 chó.

6. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm : $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$.

A. m ≠ 3 hay m ≠ –3 B. m ≠ 3 và m ≠ –3

C. m ≠ 3 D. m ≠ –3.

7. Tìm (x, y) sao cho : $\begin{cases} 5x - 7y + 3 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$.

A. $\left(-\frac{4}{19}; -\frac{11}{9}\right)$ B. $\left(-\frac{4}{19}; \frac{11}{9}\right)$

C. $\left(\frac{4}{19}; \frac{11}{9}\right)$ D. $\left(\frac{4}{19}; -\frac{11}{9}\right)$.

8. Tìm x sao cho : $\begin{cases} x + 2y + 2z = \dfrac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5 \end{cases}$.

A. $-\dfrac{7}{2}$ B. $\dfrac{5}{2}$ C. $-\dfrac{7}{2}$ D. $\dfrac{7}{2}$.

9.

Trăm trâu trăm cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Ba con một bó
Thằng Tí đếm thấy
Trâu đứng tám con
Hỏi có cả thảy
Bao nhiêu trâu già ?

A. 80 B. 81 C. 78 D. 84.

10. Tìm tham số m để phương trình sau vô nghiệm : $\begin{cases} mx + y + m = 0 \\ x + my + m = 0 \end{cases}$.

A. m = 1 B. m = –1 C. m = 0 D. m ≠ 1.

11. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm : $\begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \\ 4x - 6y - 2z = -1 \end{cases}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

12. Tìm nghiệm (x; y) của hệ : $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}2y - 0{,}33 = 0 \\ 1{,}2x + 0{,}4y - 0{,}6 = 0 \end{cases}$.

A. (–0, 7; 0, 6) B. (0, 6; –0, 7)

C. (0, 7; –0, 6) D. Vô nghiệm.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. LÍ THUYẾT

§1. *Phương trình bậc hai*

I. Định nghĩa

1. Phương trình bậc hai với ẩn số x là phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1) \qquad (a \neq 0)$$

2. Giải phương trình là tìm nghiệm của phương trình này

x_0 là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$ $a\,x_0^2 + bx_0 + + c = 0$.

II. Giải và biện luận

$ax^2 + bx + c = 0$ (với a, b, c phụ thuộc tham số)

(I) $a = 0$: phương trình suy biến thành bậc 1.

(II) $a \neq 0$: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.
- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

III. Định lí Viet

1. Định lí thuận :

Cho phương trình bậc 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$.

Nếu phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì :

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P &= x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

2. Định lí đảo :

Nếu hai số x_1, x_2 có tổng là S và tích là P thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai : $X^2 - SX + P = 0$.

- Điều kiện để x_1, x_2 tồn tại là : $S^2 \geq 4P$.

IV. Dấu của nghiệm số

Định lí :

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc 2 :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1) \qquad (a \neq 0)$$

- $P < 0 \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 0 < x_2$ *(2 nghiệm trái dấu).*
- $P = 0 \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm $x_1 - 0 \vee x_2 = S$ *(1 nghiệm bằng 0).*
- $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm thỏa $0 < x_1 \leq x_2$ *(2 nghiệm dương).*
- $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 < 0$ *(2 nghiệm âm).*

V. Một số phương trình bậc cao quy về bậc 2

1. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Cách giải :

- Phân tích ra tích, thường bằng cách nhẩm tìm một nghiệm α, phương trình khi đó thành :

$$(x - \alpha)(ax^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha \\ f(x) = ax^2 - \beta x + \gamma = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

2. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (2) $(a \neq 0)$

Cách giải :

- Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được :

$$at^2 + bt + c = 0$$

- Giải để tìm $t \geq 0$.
- Với mỗi nghiệm $t_0 > 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt :

$$x_1 = -\sqrt{t_0}, x_2 = \sqrt{t_0}$$

§2. Tam thức bậc hai

* Xét dấu tam thức bậc 2

I. Dấu của tam thức bậc 2 :

1. Định nghĩa :

Tam thức bậc 2 là biểu thức có dạng :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{với } a \neq 0.$$

- x là biến số a, b, c là các hệ số.
- Giá trị của tam thức tại x_0 là $f(x_0) = a x_0^2 + bx_0 + c$.
- Nghiệm của tam thức là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

2. Quy tắc về dấu của tam thức bậc 2 :

Định lí :

Cho tam thức bậc 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì tam thức cùng dấu a với mọi x.
- Nếu $\Delta = 0$ thì tam thức cùng dấu a với mọi $x = -\dfrac{b}{2a}$ và bằng 0 khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$, *trái dấu a* với mọi x thuộc khoảng (x_1, x_2) và *cùng dấu a* với mọi x ở ngoài đoạn $[x_1, x_2]$.

Tóm tắt :

- $\Delta < 0$: $a(f(x) > 0, \ \forall x \in R$
- $\Delta = 0$: $af(x) > 0, \ \forall x \neq -\dfrac{b}{2a}; \quad f\left(\dfrac{b}{2a}\right) = 0$
- $\Delta > 0$: $af(x) < 0, \ \forall x \in (x_1, x_2)$

  $af(x) > 0, \ \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a	

II. Bất phương trình hữu tỉ

1. Bất phương trình bậc 2 :

- Bất phương trình bậc 2 là bất phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (\geq 0, < 0, \leq 0).$$

- Để giải bất phương trình bậc 2 ta dựa vào dấu của a và Δ, rồi tùy trường hợp rút ra tập nghiệm.
- Trong trường hợp giải và biện luận bất phương trình, ta phải lập *bảng xét dấu của a và Δ* trước, rồi giải bất phương trình trong từng trường hợp.

2. Bất phương trình hữu tỉ :

- Bất phương trình hữu tỉ là bất phương trình đưa được về dạng : $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ (≤ 0, > 0, < 0) trong đó P(x), Q(x) là các biểu thức đưa được về *dạng tích của tam thức hoặc nhị thức.*

Nguyên tắc giải :

Cách 1 :

- Đưa bất phương trình về một trong bốn dạng nêu trên.
- Phân tích P(x), Q(x) thành tích các tam thức hay nhị thức.
- Lập bảng xét dấu của biểu thức ở VT.
- Dựa vào bảng xét dấu rút ra tập nghiệm.

Cách 2 : Đặt ẩn số phụ.

III. Hệ bất phương trình hữu tỉ

- Hệ bất phương trình hữu tỉ là hệ mà mỗi thành phần là một bất phương trình hữu tỉ

Nguyên tắc giải :

- Giải từng bất phương trình của hệ.
- Tập nghiệm của hệ là giao các tập nghiệm của từng bất phương trình.

IV. Tam thức không đổi dấu trên R

Từ định lí về dấu của tam thức bậc 2, ta suy ra kết quả sau :

Cho : $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

- $f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

* Vị trí của một, hai số với nghiệm của tam thức

Định lí :

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và một số α. Ta có :

- Nếu $af(\alpha) < 0$: f(x) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < \alpha < x_2$.
- Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \end{cases}$: f(x) có hai nghiệm x_1, x_2 và $\alpha \in [x_1, x_2]$.

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$: f(x) có hai nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < \alpha$.

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$: f(x) có hai nghiệm thỏa $\alpha < x_1 < x_2$.

B. ĐỀ TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Giải và biện luận phương trình sau :

$$(m - 2)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

Giải

- $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Phương trình trở thành : $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

- $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m + 2$

$\Delta' = m^2 - (m-2)(m+1) = m + 2$

- $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$

  Phương trình vô nghiệm.

- $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

  Phương trình có nghiệm kép : $x = \dfrac{-2m}{2(m-2)} = \dfrac{(-2)}{-2-2} = \dfrac{1}{2}$.

- $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

  Phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m+2}}{m-2}, \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}.$$

Kết luận :

- $m = 2 : x = \dfrac{3}{4}$.
- $m < -2$: vô nghiệm.
- $m = -2 : x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$.
- $m > -2$ và $m \neq 2 : x_1 = \dfrac{m - \sqrt{m+2}}{m-2} ; x_2 = \dfrac{m + \sqrt{m+2}}{m-2}$.

Bài 2

Giải và biện luận phương trình sau :

$$\frac{x^2+1}{ax^2-2a} - \frac{1}{2-ax} = \frac{x}{a} \qquad (1)$$

Giải

Nhận xét : $a \neq 0$ phương trình vô nghiệm

- $a \neq 0 : (1) \Leftrightarrow (1-a)x^2 + 2x + a + 1 = 0$ (điều kiện : $x \neq \dfrac{2}{a}$)
- $a = 1$: Phương trình trở thành : $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- $a \neq 1$: Giải ra ta được hai nghiệm là :

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{a+1}{a-1}.$$

Nghiệm x_1 nhận được $\Leftrightarrow$ $-1 \neq \dfrac{2}{a}$ $\Leftrightarrow$ $a \neq -2$.

Nghiệm x_2 nhận được $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a+1}{a-1} \neq \dfrac{2}{a}$ $\Leftrightarrow$ $a^2 - a + 2 \neq 0$

(luôn thỏa vì $a^2 - a + 2 = 0$ vô nghiệm).

Kết luận :
- $a = 0$: vô nghiệm.
- $a = 1$: $x = -1$.
- $a = -2$: $x = \dfrac{1}{3}$.
- $a \neq 0; 1; -2$: $x = -1$, $x = \dfrac{a+1}{a-1}$.

Bài 3

Cho phương trình :

$$ax^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 a = 0 \qquad (1) \qquad (a \neq 0,\ a \neq -1).$$

Giả sử phương trình trên có 2 nghiệm x_1, x_2.

a) Viết phương trình bậc 2 theo z có 2 nghiệm là :

$$z_1 = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{và} \quad z_2 = \frac{x_2}{x_1}.$$

b) Tìm hệ thức độc lập đối với tham số giữa các nghiệm x_1, x_2.

c) Định a để phương trình (1) có nghiệm thỏa $x_1 = 3x_2$.

Giải

Ta có : $S = x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a}$;

$P = (a+1)^2$

a) $$z_1 + z_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{2(a+1)}{a}\right]^2 - 2(a+1)^2}{(a+1)^2} = \frac{\dfrac{4}{a^2} - 2}{1} = \frac{4 - 2a^2}{a^2}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 1$$

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là :

$$z^2 - \left(\frac{4 - 2a}{a^2}\right)^2 z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2z^2 - (4 - 2a^2)z + a^2 = 0.$$

b) $$S = \frac{2(a + 1)}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{S - 2}$$

Do đó :

$$P = \left(\frac{2}{S - 2} + 1\right)^2 = \frac{S^2}{(S - 2)^2} \quad \Rightarrow \quad (S - 2)^2 P - S^2 = 0.$$

c) Ta đã có : $x_1 + x_2 = \dfrac{2(a + 1)}{a}$; $\quad x_1x_2 = (a + 1)^2$

Giả thiết $x_1 = 3x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = \dfrac{2(a + 1)}{a} (*) \\ 3x_2^2 = (a + 1)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{(a + 1)^2}{4a^2} = \frac{(a + 1)^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 4a^2 = 3 \ \text{(vì } a \neq -1) \quad \Rightarrow \quad a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Với các giá trị trên, phương trình (1) có nghiệm x_2 xác định ở (*) phương trình (1) có nghiệm.

Vậy các giá trị cần tìm là : $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4

Cho phương trình : $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0.$

Định m để phương trình :

a) có 2 nghiệm trái dấu

b) có 2 nghiệm dương phân biệt

c) có đúng một nghiệm âm.

Giải

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P = \dfrac{m - 3}{m} < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < m < 3.$$

b) Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ P = \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ S = \dfrac{2(m-2)}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < 0 \vee m > 3 \\ m < 0 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < 0 \vee 3 < m < 4 .$$

c) *Trường hợp 1* : $m = 0$

Phương trình trở thành :

$$4x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4} > 0$$

Do đó : $m = 0$ không nhận được.

Trường hợp 2 : $m \neq 0$; $\Delta = 4 - m$

Lúc này, phương trình có 1 nghiệm kép

$$x = \frac{m-2}{m} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

Do đó : $m = 4$ không nhận được.

Phương trình có đúng một nghiệm âm trong các khả năng sau :

$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \quad 0 < m < 3$ (kết quả câu a)

$$x_1 < x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m - 3 = 0 \\ -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2(m-2)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = 3 \\ 0 < m < 2 \end{cases}$$

không có giá trị m nào thỏa hệ này.

Vậy những giá trị cần tìm là : $0 < m < 3$.

Bài 5

Xét dấu $E = \left(x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(2x + \dfrac{7}{2}\right)^2$.

Giải

$$E = \left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) + \left(2x - \frac{7}{2}\right)\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) - \left(2x - \frac{7}{2}\right) =$$

$$= (x^2 - 4)(x^2 - 4x + 3)$$

- $x^2 - 4$ có 2 nghiệm là $-2; 2$
- $x^2 - 4x + 3$ có 2 nghiệm là : $1; 3$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$x^2 - 4x + 3$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
E		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Bài 6

Giải bất phương trình : $\dfrac{x + 5}{2x - 1} + \dfrac{2x - 1}{x + 5} > 2$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x + 5}{2x - 1} + \frac{2x - 1}{x + 5} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 5)^2 + (2x - 1)^2 - 2(2x - 1)(x + 5)}{(2x - 1)(x + 5)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 12x + 36}{(2x - 1)(x + 5)} > 0$$

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{2}$		6		$+\infty$
$x^2 - 12x + 36$		+	|	+	|	+	0	+	
$(2x - 1)(x + 5)$		+	0	−	0	+	|	+	
VT		+		▨ −		+	0	+	

(*Chú ý* : dấu $\dfrac{A}{B}$ cũng là dấu của dấu A.B)

Vậy nghiệm của bất phương trình là :

$$x < -5 \vee \frac{1}{2} < x < 6 \vee x > 6.$$

Bài 7

Giải và biện luận bất phương trình :

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0 \qquad (1)$$

Giải

Trường hợp 1 : $m = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \quad 4x - 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2 : $m \neq -1$, $a = m + 1$

$$\Delta' = (m - 1)^2 - (m + 1)(3m - 3) =$$

$$= (m - 1)[(m - 1) - 3(m + 1)] = (m - 1)(-2m - 4).$$

m	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
a		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Δ'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

a) $m < -2$

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in R \\ \Delta' < 0 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

b) $m = -2$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \forall x \neq \dfrac{m - 1}{m + 1} = \dfrac{-2 - 1}{-2 + 1} = 3 \\ f(x) = 0 \text{ khi } x = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là : $x = 3$.

c) $-2 < m < -1$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) \text{ có 2 nghiệm phân biệt :}$$

$$x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{\Delta'}}{m + 1}; \qquad x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{\Delta'}}{m + 1} \quad (x_1 < x_2).$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là : $x_1 \leq x \leq x_2$.

d) $-1 < m < 1$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) \text{ có 2 nghiệm phân biệt :}$$

$$x_3 = \frac{m - 1 - \sqrt{\Delta'}}{m + 1}; \qquad x_4 = \frac{m - 1 + \sqrt{\Delta'}}{m + 1} \ (x_3 < x_4).$$

x	$-\infty$		x_3		x_4		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	–	

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là : $x \le x_3 \vee x \ge x_4$.

e) $m \ge 1$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) < 0, \forall x \in R$$

$\Rightarrow$ nghiệm của (1) là : $\forall x \in R$.

Kết luận :

- $m = -1$: $x \ge \frac{3}{2}$.
- $m < -2$: vô nghiệm.
- $m = -2$: $x = 3$.
- $-2 < m < -1$:

$$\frac{m - 1 + \sqrt{(m - 1)(-2m - 4)}}{m + 1} \le x \le \frac{m - 1 - \sqrt{(m - 1)(-2m - 4)}}{m + 1}.$$

- $-1 < m < 1$:

$$x \le \frac{m - 1 - \sqrt{(m - 1)(-2m - 4)}}{m + 1} \vee x \ge \frac{m - 1 + \sqrt{(m - 1)(-2m - 4)}}{m + 1}.$$

- $m \ge 1$: $\forall x \in R$.

Bài 8

Giải hệ : $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \le 0 & (1) \\ x^2 - 8x + 15 \ge 0 & (2) \end{cases}$.

Giải

Cách 1 :

x		1		6	
$VT_{(1)}$	+	0	−	0	+

nghiệm của (1) là : $1 \le x \le 6$.

x		3		5	
$VT_{(2)}$	+	0	−	0	+

nghiệm của (2) là : $x \le 3 \vee x \ge 5$.

Kết hợp lại, ta được nghiệm của hệ là :

$$1 \le x \le 3 \vee 5 \le x \le 6.$$

Cách 2 :

Xét dấu bất phương trình (1) và bất phương trình (2) vào chung một bảng

x	$-\infty$		1		3		5		6		$+\infty$
$VT_{(1)}$		+	0	−		−		−	0	+	
$VT_{(2)}$		+		+	0	−	0	+		+	

Nghiệm của hệ : $1 \le x \le 3 \vee 5 \le x \le 6$.

Bài 9

Định m để : $f(x) = mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in R$.

Giải

- *m = 0*

$f(x) = 4x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$

Do đó : m = 0 không nhận được.

- *m ≠ 0*

$$f(x) > 0, \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' = 4 - m^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m > 2.$$

Vậy : giá trị cần tìm là : $m > 2$.

Bài 10

Định m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$(m + 1)x^2 - 2mx - (m - 3) < 0 \qquad (1)$$

Giải

Đặt : $f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx - (m - 3)$

Bất phương trình (1) vô nghiệm $f(x) < 0, \forall x$.

- *m = – 1*

  $f(x) = 2x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2$

  Do đó : m = –1 không nhận được.

- *m ≠ –1*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = m + 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 + (m + 1)(m - 3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > -1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} \leq m \leq \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm là : $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} \leq m \leq \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$.

Bài 11

Biện luận theo m vị trí số 2 đối với nghiệm của phương trình :

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 6 = 0 \qquad (1)$$

Giải

- *m = 2*

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad -6x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3} < 2.$$

- *m ≠ 2*

$$\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 2)(2m - 6) = -m^2 + 12m - 11$$

$$af(2) = (m - 2)(2m - 18)$$

$$\frac{S}{2} - 2 = \frac{m + 1}{m - 2} - 2 = \frac{-m + 5}{m - 2}$$

m	Δ	$af(2)$	$\frac{S}{2} - 2$	Kết luận
$+\infty$				
	$-$	$+$	$-$	vô nghiệm
11	0			$x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$
	$+$	$+$	$-$	$x_1 < x_2 < 2$
9		0		$x_1 = \frac{6}{7}, \quad x_2 = 2$
	$+$	$-$	$-$	
5			0	$x_1 < 2 < x_2$
	$+$	$-$	$+$	
2				$x = -\frac{1}{3}$
	$+$	$+$	$-$	$x_1 < x_2 < 2$
1	0			$x_1 = x_2 = -2$
	$-$	$+$	$-$	vô nghiệm
$-\infty$				

Bài 12

Cho phương trình : $x^2 - 6mx + (2 - 2m + 9m^2) = 0$ (1)

Định m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa :

a) $x_1 < 4 < x_2$

b) $3 < x_1 \leq x_2$.

Giải

Đặt $f(x) = x^2 - 6mx + (2 - m + 9m^2)$ $(a = 1)$

a) $x_1 < 4 < x_2 \Leftrightarrow af(4) < 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 26m + 18 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{13 - \sqrt{7}}{9} < m < \frac{13 + \sqrt{7}}{9}.$$

b) $3 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m - 2 \ge 0 \\ af(3) = 9m^2 - 20m + 11 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = 3m > 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad m > \dfrac{11}{9}.$

Bài 13

Định m để : $f(x) = mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0, \forall x > 0.$

Trường hợp 1 : $m = 0$

Lúc này : $f(x) = -4x + 1$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu của f(x) ta thấy : m = 0 không nhận được.

Trường hợp 2 : $m \neq 0 : \begin{cases} a = m \\ \Delta' = -3m^2 - m + 4 \end{cases}$

m	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		1		$+\infty$
a		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Δ'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

- *m < o* : f(x) luôn âm hay dương trong một khoảng hữu hạn.

  Do đó : m < 0 không nhận được.

- *m > 1* $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

  Do đó : m > 1 nhận được.

- *m = 1* $\Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$			0	$+$	

(nghiệm kép $x = \frac{4}{2m} = 2$)

m = 1 không nhận được.

- $0 \leq m < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

f(x) có 2 nghiệm phân biệt : x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Ta thấy : $f(x) > 0, \forall x > 0 \iff x_1 < x_2 \leq 0$

$$\iff \begin{cases} 0 < m < 1 \\ af(0) = m(3m+1) \geq 0 \\ \frac{3}{2} - 0 = \frac{4}{2m} < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \leq -\frac{1}{3} \vee m \geq 0 \text{ vô nghiệm} \\ m < 0 \end{cases}$$

Kết luận :

Những giá trị cần tìm là : m > 1.

Bài 14

Định m để $f(x) = 2x^2 + mx + 3 \geq 0, \forall x \in [-1, 1]$.

Giải

$\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 24 \end{cases}$

m	$-\infty$		$-2\sqrt{6}$		$2\sqrt{6}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

- $-2\sqrt{6} \leq m \leq 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 0$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq 0, \supset x \in R$

$\Rightarrow \quad f(x) \geq 0 \supseteq x \in [-1, 1]$

Do đó : $-2\sqrt{6} \le m \le 2\sqrt{6}$ nhận được.

- $m < -2\sqrt{6} \vee m > 2\sqrt{6} \Rightarrow \Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

f(x) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Ta thấy :

$f(x) \ge 0, \forall x \in [-1, 1]$; $\quad x_1 < x_2 \le -1 \vee -1 < 1 \le x_1 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{6} \vee m > 2\sqrt{6} \\ af(-1) = 2(5 - m) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} - (-1) = -\dfrac{m}{4} + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{6} \vee m > 2\sqrt{6} \\ af(1) = 2(m + 5) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 = -\dfrac{m}{4} - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} < m \le 5 \vee -5 \le m < -2\sqrt{6}.$$

Kết luận :

Những giá trị cần tìm là : $-5 \le m \le 5$.

Bài 15

Cho phương trình :

$$m^2(x - 2) + m(x - 1)(x - 2) + 3(x - 1) = 0$$

Chứng minh phương trình trên có nghiệm, $\forall m$.

Giải

Đặt vế trái là f(x)

$f(1) = -m^2$;

$f(2) = 3$,

$f(1).f(2) = -3m^2 \le 0$

phương trình có nghiệm, $\forall m$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Cho phương trình : $x^2 + 7x - 260 = 0$ (1)

Biết rằng (1) có nghiệm $x_1 = 13$. Hỏi x_2 bằng bao nhiêu ?

A. -27 B. -20 C. 20 D. 8.

2. Cho phương trình : $(m - 1)x^2 - 6(m - 1)x + 2m - 3 = 0$ (1)

Với giá trị nào sau đây của m thì có nghiệm kép ?

A. $m = \frac{7}{6}$ B. $m = -\frac{6}{7}$ C. $m = \frac{6}{7}$ D $m = -1$.

3. Tìm điều kiện của m để phương trình sau có 2 nghiệm âm phân biệt : $x^2 - mx - 1 = 0$.

A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $m \neq 0$ D. $m > -4$.

4. Tìm điều kiện của m để phương trình sau có 2 nghiệm dương phân biệt : $x^2 + 4mx + m^2 = 0$.

A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m \geq 0$ D. $m \neq 0$.

5. Cho phương trình : $(m - 1)x^2 + (2 - m)x = 0$

Tìm m để (1) có nghiệm $x_1 = -$ và khi đó tính x_2 ?

A. $m = -\frac{3}{4}$; $x_2 = -1$ B. $m = \frac{3}{4}$; $x_2 = 1$

C. $m = -\frac{4}{3}$; $x_2 = -1$ D. $m = \frac{4}{3}$; $x_2 = 1$.

6. Phương trình : $x^4 - 2003x^2 - 2004 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4.

7. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm : $x^4 + 1999x^2 + 13 = 0$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4.

8. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm : $x^4 - 2005x^2 + 13 = 0$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4.

9. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm âm : $x^4 - 2005x^2 - 13 = 0$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

10. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm âm : $x^6 + 2003x^3 - 2005 = 0$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 6.

§2. TAM THỨC BẬC HAI

1. Cho bất phương trình : $x^2 - 6x + 8 \le 0$ (1).

Tập hợp nào sau đây có tất cả các phần tử là nghiệm của (1) ?

A. $[2, 3]$　　B. $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

C. $[2, 8]$　　D. $[1, 4]$.

2. Cho bất phương trình : $x^2 - 8x + 7 \ge 0$ (1).

Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử không phải là nghiệm của (1) ?

A. $(-\infty, 0]$　　B. $[8, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$　　D. $[6, +\infty)$.

3. Cho bất phương trình : $(m - 5)x^2 + (m - 1)x + m = 0$ (1).

Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$.

A. $m < \frac{8}{3}$　　B. $\frac{8}{3} < m < 5$

C. $m \ge 5$　　D. $\frac{8}{3} \le m \le 5$.

4. Cho phương trình : $x^2 - 2x - m = 0$ (1).

Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < 2$.

A. $m > 0$　　B. $m < -1$

C. $-1 < m < 0$　　D. $m > -\frac{1}{4}$.

5. Cho phương trình : $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5$ (1).

Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

A. $-5 < m < -1$　　B. $-1 < m < 5$

C. $m < -5$ hay $m > 1$　　D. $m > -1$ và $m \ne 0$.

6. Cho $f(x) = mx^2 - 4x + 1$. Với giá trị nào của m thì $f(x) > 0$ với mọi $x \in R$.

A. $m > 0$　　B. $m > 4$　　C. $0 < m < 4$　　D. $m < 0$.

7. Cho $f(x) = mx^2 - 2x - 1$. Xác định m để $f(x) < 0$ với $x \in R$.

A. $m < -1$

B. $m < 0$

C. $-1 < m < 0$

D. $m < 1$ và $m \neq 0$.

8. Tìm giá trị của tham số m để tam thức $f(x) = -2x^2 - mx + m$ luôn luôn âm với mọi x.

A. $m < -8$ hay $m > 0$

B. $m < -8$

C. $-8 < m < 0$

D. $m > 0$.

9. Tam thức nào sau đây luôn luôn dương với mọi x ?

A. $- x^2 + 2x - 10$

B. $x^2 - 2x + 10$

C. $x^2 - 10x + 2$

D. $x^2 - 277x - 1999$.

10. Phương trình nào sau đây luôn có nghiệm với mọi m ?

A. $x^2 - 2mx + m^2 + 1 = 0$

B. $-4x^2 + 4mx - 2m^2 - 2 = 0$

C. $x^4 + mx^2 + m^2 + 2 = 0$

D. $m(x^2 - 9) + x(x - 5) = 0$.

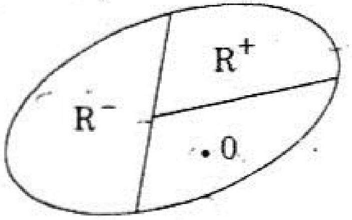
Chương V

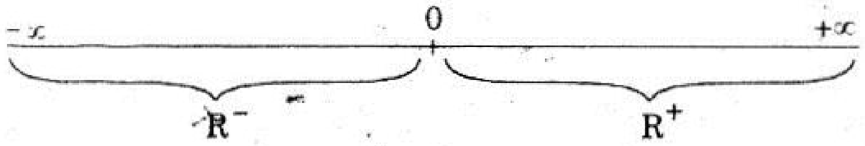
BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. LÍ THUYẾT

§1. Bất đẳng thức

1. Khái niệm bất đẳng thức :





* Ta đã biết tập hợp R các số thực được phân hoạch thành 3 tập con

$$R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$$

R^- : Tập các số thực âm

R^+ : Tập các số thực dương

$\{0\}$: Tập chỉ gồm một phần tử là số không.

* Cho $a, b \in R$.

Bất đẳng thức là hàm mệnh đề : a lớn hơn b, kí hiệu là : $a > b$ và được định nghĩa như sau :

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in R^+$$

* Chú ý : $a > b \quad \Leftrightarrow \quad b < a$ (Đọc là b nhỏ hơn a).

2. Bất đẳng thức mở rộng :

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad b \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > b \\ a = b \end{array}\right.$$

3. Chứng minh một bất đẳng thức :

– Một bất đẳng thức là một hàm mệnh đề nên có thể đúng hoặc sai.

- Chứng minh một bất đẳng thức : $a \geq b$ nghĩa là chứng minh mệnh đề : $a \geq b$ có chân trị đúng.

4. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức :

Tính chất 1 : $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

Tính chất 2 : $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$

Tính chất 3 : $\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \Rightarrow a + c \geq b + d$

Chú ý : Không được trừ vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.

Ví dụ :

$10 > 4$ (Đúng)

$9 > 2$ (Đúng)

$10 - 9 > 4 - 2$ (Sai)

Tính chất 4 : $\begin{cases} a \geq b \\ c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \geq bc$

$\begin{cases} a \geq b \\ c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \leq bc$

Tính chất 5 : $\begin{cases} a \geq b \geq 0 \\ n > 0 \end{cases} \Rightarrow a^n \geq b^n$

Tính chất 6 : $\begin{cases} a \geq b \\ b \geq c \end{cases} \Rightarrow a \geq c.$

5. Dùng biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp

1. Chỉ cần dùng một số trong các tính chất cơ bản ở trên ta có thể chứng minh một số lớn các bất đẳng thức.
2. Thông thường ta biến đổi tương đương theo dạng sau :

Đề bài : Chứng minh rằng $A_1 \geq B_1$ (1)

Ta có : $A_1 \geq B_1$ (1)

$\Leftrightarrow A_2 \geq B_2$ (2)

$\Leftrightarrow A_3 \geq B_3$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow A_n \geq B_n$ (n)

(n) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng

Vậy ta đã chứng minh được $A_1 \geq B_1$.

§2. Bất đẳng thức Côsi (Cauchy)

1. Dạng tổng quát của BĐT Côsi :

* Cho n số không âm : $a_1, a_2, ..., a_n$.

* Ta có : $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

* Dấu bằng chỉ xảy ra khi:

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n.$$

2. Dạng viết tắt của BĐT Côsi :

$$a_i \geq 0 \quad i = \overline{1...n}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\sum_{1}^{n} a_i}$$

3. Dạng đơn giản của Côsi :

* $a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

* $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

* $a^2 + b^2 \geq 2ab$

* $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \; (a \geq 0 \; ; b \geq 0 \; ; c \geq 0)$.

4. Các dấu hiệu nên dùng BĐT Côsi :

* Khi các số hạng đều không âm.

* Khi BĐT có dạng : Tổng $\geq$ Tích.

§3. Bất phương trình bậc nhất

I. Đại cương về bất phương trình :

Cho f(x) và g(x) là hai biểu thức của x. Ta gọi mệnh đề chứa biến dạng

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) \le g(x)) \qquad (1)$$

hoặc $$f(x) > g(x) \quad (f(x) \ge g(x)) \qquad (2)$$

là bất phương trình một ẩn, x là *ẩn số*, f(x) là vế trái, g(x) là vế phải của bất phương trình.

Cũng như đối với phương trình, *điều kiện có nghĩa* (gọi tắt là *điều kiện*) của bất phương trình là các điều kiện của ẩn số x để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa. Số x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (1).

Giải một bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó. Nếu tập nghiệm của một bất phương trình là tập rỗng, ta nói bất phương trình đó *vô nghiệm*.

II. Bất phương trình tương đương :

Hai bất phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng). Cũng như đối với phương trình, ta sử dụng kí hiệu ⇔ để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình. Khi giải một bất phương trình, ta thường biến đổi bất phương trình đã cho thành một bất phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là *biến đổi tương đương*.

Định lí :

Nếu giữ nguyên điều kiện có nghĩa (kí hiệu là A) của một bất phương trình và thực hiện trên nó các phép biến đổi sau thì ta được một bất phương trình tương đương :

a) Biến đổi đồng nhất ở từng vế.

b) Cộng hay trừ vào hai vế của bất phương trình cùng một số hoặc cùng một biểu thức xác định với mọi x thỏa điều kiện A.

c) Nhân hoặc chia hai vế của bất phương trình với cùng một số dương hoặc với cùng một biểu thức luôn dương với mọi x thỏa mãn điều kiện A.

d) Nhân hoặc chia hai vế của bất phương trình với cùng một số âm hoặc với cùng một biểu thức luôn âm với mọi x thỏa mãn điều kiện A và đổi chiều bất phương trình.

III. Bất phương trình bậc nhất một ẩn :

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b \le 0$, hoặc $ax + b > 0$, hoặc $ax + b \ge 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \ne 0$, được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn*. Đó là những bất phương trình đơn giản nhất. Ta đã biết :

- Nếu a > 0 thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty ; -\frac{b}{a}\right)$.
- Nếu a < 0 thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{b}{a} ; +\infty\right)$.

IV. Bất phương trình chứa tham số :

Cũng như phương trình, ta thường gặp các bất phương trình chứa tham số. Với một bất phương trình chứa tham số, tập nghiệm của nó phụ thuộc vào giá trị của tham số. Vì vậy ta nói tìm tập nghiệm của một bất phương trình chứa tham số là *giải và biện luận* bất phương trình đó.

V. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn :

Định nghĩa :

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là mệnh đề chứa hai biến dạng

$$ax + by \leq c \qquad (1)$$

$$(ax + by < c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là ẩn số.

Cặp số $(x_0 ; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 \leq c$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (1). *Giải bất phương trình* (1) là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của nó.

*** Giải bất phương trình bậc nhất hai ẩn :**

Cũng như phương trình bậc nhất hai ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của nó ta thường sử dụng phương pháp biểu diễn hình học. Tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó. Như vậy, xác định miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn cũng là giải bất phương trình đó.

§4. Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa :

Bất phương trình bậc hai một ẩn là bất phương trình dạng

$ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \le 0$, hoặc $ax^2 + bx + c > 0$, hoặc $ax^2 + bx + c \ge 0$), trong đó a, b, c là những số đã cho, $a \neq 0$; x là ẩn số.

Cách giải bất phương trình bậc hai :

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$, thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với a (trường hợp $a > 0$).

Ta thực hiện các bước sau :

* Lập bảng xét dấu $f(x) = ax^2 + bx + c$

* Dựa vào bảng xét dấu của f(x) để chọn miền nghiệm của bất phương trình.

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

1. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$

2. $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

3. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$

4. $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} \ge 0$ **5.** $x^4 + y^4 \ge x^3y + y^3x$

Giải

1. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (a^2 - 2abc + b^2c^2) + (b^2 - 2abc + a^2c^2) + (c^2 - 2abc + a^2b^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ac)^2 + (c - ab)^2 \ge 0 \qquad (2)$$

(2) Đúng $\Leftrightarrow$ (1) Đúng.

2. $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - 2a + 1) + \frac{1}{2}(b^2 - 2b + 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{2}(b - 1)^2 \ge 0 \qquad (2)$$

(2) Đúng $\Leftrightarrow$ (1) Đúng.

3. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{4}\right) + \left(a^2 - ac + \frac{c^2}{4}\right) + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{4}\right) + \left(a^2 - ae + \frac{e^2}{4}\right) \geq 0 \quad (2)$$

(2) Đúng $\Leftrightarrow$ (1) Đúng.

4. $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} \geq 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)\left[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right]}{(a + b + c)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \geq 0 \quad (2)$$

(2) Đúng $\Leftrightarrow$ (1) Đúng.

5. $x^4 + y^4 \geq x^3y + y^3x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow x^3(x - y) + y^3(y - x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \geq 0 \quad (2)$$

(2) Đúng $\Leftrightarrow$ (1) Đúng.

Bài 2

Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

Giải

Đặt $A = \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b}$

Ta chứng minh : $1 < A < 2$

* Ta có : $\dfrac{a}{a+b+c+d} + \dfrac{b}{a+b+c+d} + \dfrac{c}{a+b+c+d} + \dfrac{d}{a+b+c+d} < A$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < A \quad \Rightarrow \quad 1 < A.$$

* Ta có : $A < \dfrac{a}{a+c} + \dfrac{c}{a+c} + \dfrac{b}{b+d} + \dfrac{d}{b+d}$

$$\Rightarrow \quad A < \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d} \quad \Rightarrow \quad A < 2.$$

Vậy $1 < A < 2$.

Bài 3

Cho a, b, c ∈ [0, 1]. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

Giải

Ta có : $a, b, c \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad a^2, b^2, c^2 \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \quad (a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 - 1 + a^2 + b^2 + c^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

Bài 4

Cho ba số dương a, b, c thỏa $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{b+c}{2c-b} \ge 4 \qquad (1).$$

Giải

Ta có : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{2ac}{a+c}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{a + \dfrac{2ac}{a+c}}{2a - \dfrac{2ac}{a+c}} + \frac{\dfrac{2ac}{a+c} + c}{2c - \dfrac{2ac}{a+c}} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + 3ac}{2a^2} + \frac{c^2 + 3ac}{2c^2} \ge 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+3c}{2a} + \frac{c+3a}{2c} \ge 4$$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + c^2 + 6ac \geq 8ac \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + c^2 - 2ac \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - c)^2 \geq 0 \qquad (2)$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 5

Cho $a \leq 6$, $b \leq -8$, $c \leq 3$, $x \geq 1$.

Chứng minh rằng : $x^4 - ax^2 - bx \geq c$ (1).

Giải

Ta có : $a \leq 6 \Rightarrow -a \geq -6$

$b \leq -8 \Rightarrow -b \geq 8$

$\Rightarrow \quad x^4 - ax^2 - bx \geq x^4 - 6x^2 + 8x$

Ta chỉ cần chứng minh : $x^4 - 6x^2 + 8x \geq 3$ (2)

Ta có : (2) $\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^3 + x^2 - 5x + 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 (x^2 + 2x - 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)^3 (x + 3) \geq 0$ (3)

Do $x \geq 1$ nên (3) đúng $\Rightarrow$ (2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 6

Cho ba số a, b, c thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$ (1).

Giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2, b^2, c^2 \leq 1$

$\Rightarrow \quad -1 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow (a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$

$\Rightarrow \quad abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0$ (2)

Ta chỉ cần chứng minh : $ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0$ (3)

Ta có :

(3) $\Leftrightarrow \quad 2ab + 2bc + 2ca + 2a + 2b + 2c + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2ab + 2bc + 2ca + 2a + 2b + 2c + 1 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c + 1)^2 \geq 0$ (4)

(4) Đúng $\Rightarrow$ (3) Đúng

(2) + (3) $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 7

a, b, c là ba số tùy ý thuộc đoạn [0, 1].

Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1 \qquad (1)$$

Giải

Giả sử : $a \geq b \geq c$. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b+c+1}-1+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b-c-1}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-a)\left[(1-b)(1-c)-\frac{1}{b+c+1}\right]+b\left(\frac{1}{c+a+1}-\frac{1}{b+c+1}\right)+$$

$$+c\left(\frac{1}{a+b+1}-\frac{1}{b+c+1}\right)\leq 0 \qquad (2)$$

Ta đã có : $\frac{1}{c+a+1}-\frac{1}{b+c+1}<0$

và $\frac{1}{a+b+1}-\frac{1}{b+c+1}<0$

Ta chỉ cần chứng minh : $(1-b)(1-c)-\frac{1}{b+c+1}\leq 0$ (3)

$$\text{Ta có : } (3) \Leftrightarrow \frac{(1-b)(1-c)(b+c+1)-1}{b+c+1}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-b-c+bc)(b+c+1)-1}{b+c+1}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow b^2(c-1)+c^2(b-1)-bc\leq 0 \qquad (4)$$

Theo giả thiết (4) đúng

⇒ (3) đúng ⇒ (2) đúng ⇒ (1) đúng.

Bài 8

Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3} \qquad (1)$$

Giải

Ta chứng minh : $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \ge \dfrac{2a-b}{3}$ (2)

Ta có : (2) $\Leftrightarrow$ $3a^3 \ge (a^2+ab+b^2)(2a-b)$

$\Leftrightarrow$ $3a^3 \ge 2a^3 + 2a^2b + 2ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$\Leftrightarrow$ $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$

$\Leftrightarrow$ $a(a^2-b^2) + b(b^2-a^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(a^2-b^2)(a-b) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(a-b)^2(a+b) \ge 0$ (3)

(3) đúng $\Rightarrow$ (2)đúng.

Vậy ta có : $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \ge \dfrac{2a-b}{3}$

Tương tự : $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} \ge \dfrac{2b-c}{3}$

$\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \dfrac{2c-a}{3}$.

Cộng vế với vế ta được :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

Bài 9

Cho $ab \ge 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab} \quad (1)$$

Giải

Ta có :

(1) $\Leftrightarrow$ $(2+a^2+b^2)(1+ab) \ge 2(1+a^2)(1+b^2)$

$\Leftrightarrow$ $2 + 2ab + a^2 + a^3b + b^2 + ab^2 \ge 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2$

$\Leftrightarrow$ $a^3b + ab^3 - 2a^2b^2 \ge a^2 + b^2 - 2ab$

$\Leftrightarrow$ $ab(a^2+b^2-2ab) \ge a^2 + b^2 - 2ab$

$\Leftrightarrow$ $ab(a-b)^2 \ge (a-b)^2$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2(ab-1) \geq 0 \qquad (2)$$

Theo giả thiết (2) đúng ⇒ (1) đúng.

Bài 10

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

1. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0)$

2. $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0)$

3. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

4. $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ $\quad (a \geq 1, b \geq 1)$

5. $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$.

Giải

1. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0)$

Theo Côsi ta có :

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\,.\sqrt{a}\,.\sqrt[3]{b}\,.\sqrt[3]{b}\,.\sqrt[3]{b}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}\,.$$

2. $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0)$

Theo Côsi ta có :

$$3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + 6b^3 = a^3 + a^3 + a^3 + b^3 + b^3 + b^3 + b^3 + b^3 + b^3$$

$$\geq 9\sqrt[9]{a^9.b^{18}} = 9ab^2$$

Vậy : $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$.

3. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ $\quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

Theo Côsi ta có : $\quad a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

4. $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ $\quad (a \geq 1, b \geq 1)$

Theo Côsi ta có : $\quad (a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1}$

$$\Rightarrow \quad a \geq 2\sqrt{a-1}$$

$$\Rightarrow \quad ab \geq 2b\sqrt{a-1}$$

Tương tự ta có :

$$ab \geq 2a\sqrt{b-1}$$

$$\Rightarrow \quad 2ab \geq 2a\sqrt{b-1} + 2b\sqrt{a-1}$$

$$\Rightarrow \quad ab \geq a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}$$

5. $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$

Theo Côsi ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \quad 2(a + b + c) \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Bài 11

Với mọi số a, b, chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$X^2 + Y^2 \geq 2|XY| \qquad (1)$$

Áp dụng (1) ta được :

$$(a+b)^2 + (1-ab)^2 \geq 2|(a+b)(1-ab)|$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab + 1 - 2ab + a^2b^2 \geq 2|(a+b)(1-ab)|$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 1 + a^2b^2 \geq 2|(a+b)(1-ab)|$$

$$\Rightarrow \quad (a^2+1)(b^2+1) \geq 2|(a+b)(1-ab)|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|(a+b)(1-ab)|}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 12

Cho các số $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ thỏa các điều kiện :

$$x_1x_2 > 0, \quad x_1z_1 > y_1^2, \quad x_2z_2 > y_2^2.$$

Chứng minh rằng : $(x_1 + x_2)(z_1 + z_2) \geq (y_1 + y_2)^2$ (1)

Giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2 \geq y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \tag{2}$$

Theo giả thiết ta đã có : $x_1z_1 \geq y_1^2$ (3)

$$x_2z_2 \geq y_2^2 \tag{4}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1x_2 > 0 \\ x_2z_2 \geq 0 \\ x_1z_1 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1z_2 \geq 0 \\ x_2z_1 \geq 0 \end{cases}$$

Theo Côsi ta có : $x_1z_2 + x_2z_1 \geq 2\sqrt{x_1z_1x_2z_2}$

$$x_1z_2 + x_2z_1 \geq 2\sqrt{y_1^2y_2^2}$$

$$x_1z_2 + x_2z_1 \geq 2y_1y_2 \tag{5}$$

$(3) + (4) + (5) \Rightarrow$ (2)đúng $\Rightarrow$ (1)đúng.

Bài 13

Cho 2n số dương : $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{b_1...b_n} \tag{1}$$

Giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad 1 \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1}...\frac{a_n}{a_n + b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1}...\frac{b_n}{a_n + b_n}} \tag{2}$$

Theo Côsi ta có :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + ... + \frac{a_n}{a_n + b_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1}...\frac{a_n}{a_n + b_n}} \tag{3}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + ... + \frac{b_n}{a_n + b_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1}...\frac{b_n}{a_n + b_n}} \tag{4}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\left[\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n+b_n}{a_n+b_n}\right] \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{b_n}{a_n+b_n}}$$

$$1 \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{b_n}{a_n+b_n}}$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 14

Cho n số dương a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Chứng minh rằng :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \qquad (1)$$

Giải

Theo Côsi ta có :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}} \qquad (3)$$

$$(2) \times (3) \Rightarrow \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \qquad (1)$$

Bài 15

a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$$

$$= (a+b+c)\left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] - 3$$

$$= \frac{1}{2}[a+b+b+c+c+a]\left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] \quad 3$$

Theo Côsi ta có :

$$(a + b + b + c + c + a)\left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Bài 16

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có $S \leq \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Giải

Theo công thức Hêrông ta có :

$$S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$$

Theo Côsi ta có :

$$(p - a)\,(p - b)\,(p - c) \leq \left[\frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3}\right]^3$$

$$(p - a)\,(p - b)\,(p - c) \leq \frac{p^3}{27}$$

$$\Rightarrow \quad S^2 \leq \frac{p^4}{27}$$

$$\Rightarrow \quad S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 17

Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh rằng :

$$(1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3 \qquad (1)$$

Giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq$$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} + 3\sqrt{abc} + abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b + c + ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \qquad (2)$$

Theo Côsi ta có :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (3)$$

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \quad (4)$$

(3) + (4) $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Bài 18

Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng :

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 8 \quad (1)$$

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{y+z}{z}\right)\left(\frac{x+z}{x}\right) \geq 8$

$$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(x + z) \geq 8xyz \quad (2)$$

Theo Côsi ta có : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$$y + z \geq 2\sqrt{yz}$$

$$z + x \geq 2\sqrt{zx}$$

$\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 19

Cho ba số a, b, c dương thỏa : $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64 \quad (1)$$

Giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{abc} \geq 64 \quad (2)$$

Theo Côsi ta có :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{a + b + c} \geq 9$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2} \geq 27$$

$$\frac{1}{abc} \geq \frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2} \geq 27$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc} \geq 64$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Bài 20

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 1$.

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9 \qquad (1)$$

Giải

Theo Côsi ta có :

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}}$$

$$\geq \frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq \frac{9}{1} = 9.$$

Bài 21

Tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của mỗi bất phương trình :

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{1}{x^2-4} \leq \frac{2x}{x^2-4x+3}$

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x1}$

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$.

Giải

a) $x \notin \{0 ; -1\}$

b) $x \notin \{2 ; -2 ; 1; 3\}$

c) $x \neq -1$

d) $x < -4 ; -4 < x \leq 1$.

Bài 22

Hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $\sqrt[4]{x^2 + 5x + 6} + \sqrt{x + 8} \le -3$

b) $\sqrt{1 + 2(x - 3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \dfrac{3}{2}$

c) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 7}$.

Giải

a) Vì $\sqrt[4]{x^2 + 5x + 6} \ge 0$ và $\sqrt{x + 8} \ge 0$.

b) Vì $\sqrt{1 + 2(x - 3)^2} \ge 1$ và $\sqrt{5 - 4x + x^2} = \sqrt{1 + (x - 2)^2} \ge 1$.

c) Vì $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} < 0$ và $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x + 7} \ge 0$.

Bài 23

Các cặp bất phương trình sau tương đương, tại sao ?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$

b) $2x^2 + 5 \le 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \le 0$

c) $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \dfrac{1}{x^2 + 1} > \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $\sqrt{x - 1} \ge x$ và $(2x + 1).\sqrt{x - 1} \ge x.(2x + 1)$.

Giải

Áp dụng định lí về biến đổi tương đương bất phương trình :

a) phần d) của định lí **b)** phần b) của định lí

c) phần b) của định lí **d)** phần d) của định lí.

Bài 24

Trong các cặp bất phương trình sau, những cặp bất phương trình nào tương đương ?

a) $2x - 1 + \dfrac{1}{x - 3} < \dfrac{1}{x - 3}$ và $2x - 1 < 0$

b) $2x - 1 + \dfrac{1}{x - 3} > \dfrac{1}{x - 3}$ và $2x - 1 > 0$

c) $x^2.(x+2) < 0$ và $x + 2 < 0$

d) $x^2.(x+2) > 0$ và $x + 2 > 0$.

Giải

a) và c).

Bài 25

Giải các bất phương trình :

a) $(x+1).\sqrt{x+4}.\sqrt{x+7} \le 0$

b) $(x+1).\sqrt{(x+4)(x+7)} \le 0$

c) $\sqrt{x^2.(x-3)} \le 0$

d) $|x|.\sqrt{x-3} \le 0$.

Giải

a) $-4 \le x \le -1$

b) $x \le -7$; $-4 \le x \le -1$

c) $x = 0$; $3 \le x < +\infty$

c) $x = 3$.

Bài 26

Giải hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

Giải

a) $x < \dfrac{22}{7}$

b) $x > 2$.

Bài 27

Giải và biện luận theo tham số m các bất phương trình, hệ bất phương trình :

a) $mx + 9 < 3x + m^2$

b) $x + 4m^2 \le 2mx + 1$

c) $\dfrac{x+1}{m+1} - m < x + \dfrac{x-1}{m+1}$

d) $\begin{cases} 1 - mx < 0 \\ (2-3m)x + m < 0 \end{cases}$

Giải

a) Nếu $m > 3$ thì nghiệm là $x < m + 3$.

Nếu $m = 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $m < 3$ thì nghiệm là $x > m + 3$.

b) Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì nghiệm là $x \geq 2m + 1$.

Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì nghiệm là $\forall x$.

Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì nghiệm là $x \leq 2m + 1$.

c) Nếu $m \neq -1$ thì nghiệm là $x > \frac{2}{m+1} - m$.

Nếu $m = -1$ thì bất phương trình vô nghiệm.

d)

m	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$
Nghiệm	$x < \frac{1}{m}$	$\varnothing$	$x > \frac{m}{3m-2}$	$x > \frac{1}{m}$		$x > \frac{m}{3m-2}$

Bài 28

Giải và biện luận bất phương trình : $(m - 1)x + 2m < 0$.

Giải

Biến đổi bất phương trình đã cho ta có :

$$(m - 1)x + 2m < 0 \iff (m - 1)x < -2m$$

Nếu $m > 1$ thì $m - 1 > 0$, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{-2m}{m-1}$.

Nếu $m < 1$ thì $m - 1 < 0$, bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{-2m}{m-1}$.

Nếu $m = 1$ thì $m - 1 = 0$, bất phương trình trở thành $0x < -2$, bất phương trình vô nghiệm.

Vậy ta có kết luận :

$m > 1$: bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{-2m}{m-1}$.

$m = 1$: bất phương trình vô nghiệm.

$m < 1$: bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{-2m}{m-1}$.

Bài 29

Giải bất phương trình : $|-2x + 1| - |x + 3| < 2$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $|-2x + 1| - |x + 3| - 2 < 0$

Khử dấu giá trị tuyệt đối trong biểu thức

$$f(x) = |-2x + 1| - |x + 3| - 2$$

ta có :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert -2x + 1\rvert$		$(-2x + 1)$		$(-2x + 1)$	0	$-(-2x + 1)$	
$\lvert x + 3\rvert$		$-(x + 3)$	0	$(x + 3)$		$(x + 3)$	
f(x)		$-x + 2$		$-3x - 4$		$x - 6$	

Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ -x + 2 < 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} -3 \le x \le \frac{1}{2} \\ -3x - 4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2} < x < +\infty \\ x - 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x < 6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3} < x < 6.$$

Nghiệm của (1) là $-\frac{4}{3} < x < 6$.

Bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối như trong ví dụ 2, ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình $|x| < a$ và $|x| > a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có : $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right. \quad (a > 0).$$

Bài 30

Giải bất phương trình : $|2x - 3| < 1$ (2)

Giải

Ta có : (2) $\Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < 2x < 4$

$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Nghiệm của (2) là $1 < x < 2$.

Bài 31

Giải bất phương trình : $|-3x + 5| \geq 2$ (3)

Giải

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x + 5 \geq 2 \\ -3x + 5 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x \geq -3 \\ -3x \leq -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq \dfrac{7}{3} \end{array}\right.$$

Nghiệm của (3) là $x \leq 1$; $x \geq \dfrac{7}{3}$.

Bài 32

Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$ b) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3}$ d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1$.

Giải

a) $\dfrac{1}{2} < x < 1$; $3 \leq x < +\infty$ **b)** $x < -1$; $0 < x < 1$; $1 < x < 3$

c) $-12 < x < -4$; $-3 < x < 0$ **d)** $-1 < x < \dfrac{2}{3}$; $1 < x < +\infty$.

Bài 33

Giải các bất phương trình :

a) $|x| + |3 - x| > 4 + |x + 2|$ **b)** $|5x - 4| \geq 6$

c) $||x - 1| - 5| \leq 2$ **d)** $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.

Giải

a) $x < -1$; $11 < x < +\infty$

b) $x \le -\dfrac{2}{5}$; $2 \le x < +\infty$

c) $-6 \le x \le -2$; $4 \le x \le 8$

d) $x < -5$; $-1 < x < 1$; $1 < x < +\infty$.

Bài 34

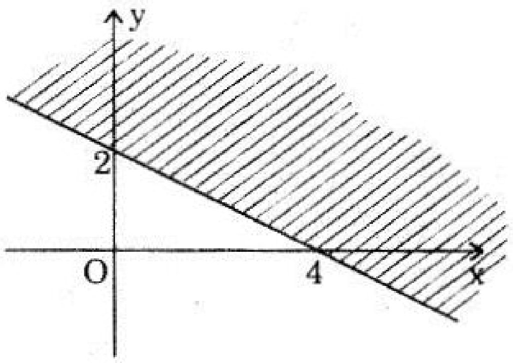
Giải các bất phương trình hai ẩn :

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

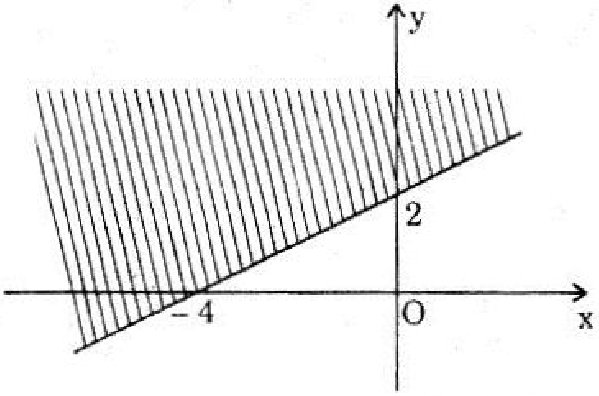
b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

Giải

a)



b)



Bài 35

Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$

b) $-3x^2 - 5x + 2 \le 0$

c) $-16x^2 + 3x - 2 \le 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 \le 0$.

Giải

a) $x < -1\ ;\ 4 < x < +\infty$

b) $x \le -2\ ;\ \frac{1}{3} \le x \le +\infty$

c) $\forall x$

d) $x = \frac{3}{2}.$

Bài 36

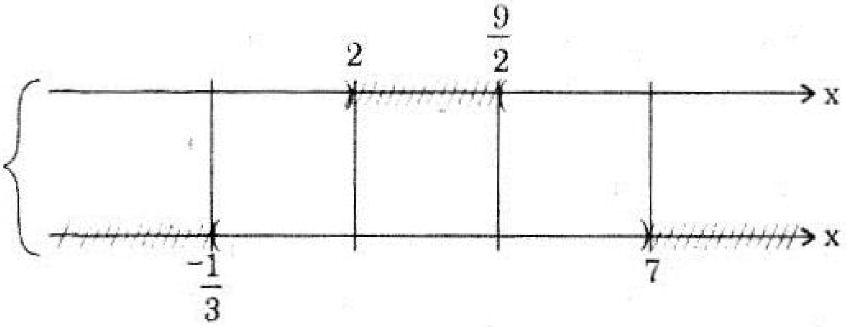
Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \le 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 < 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (2x - 1)(x + 3) < 0 \\ x^2 \le 4 \end{cases}$

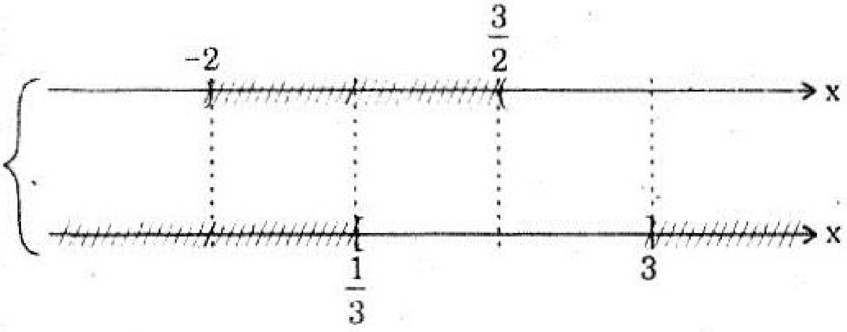
Giải

a)



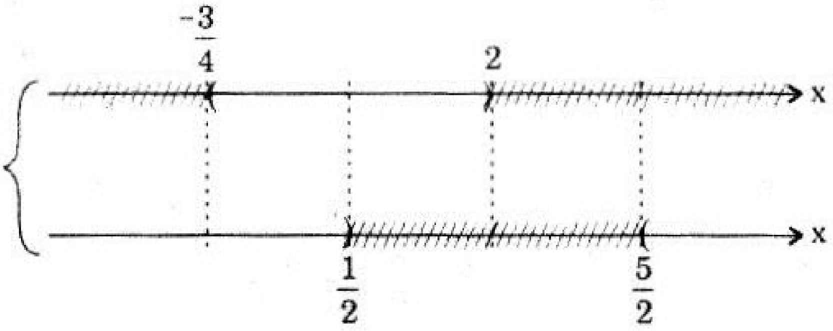
$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < x < 2;\ \frac{9}{2} < x < 7$

b)



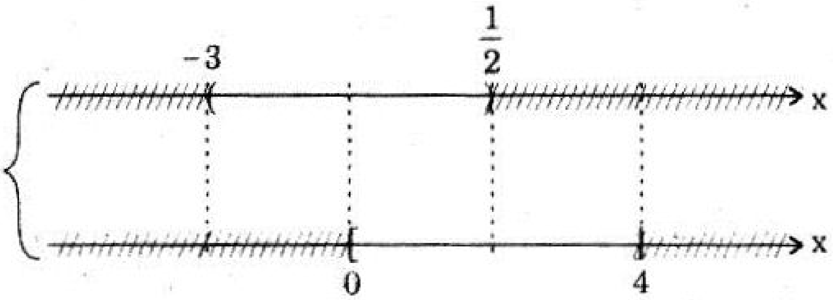
$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} < x \le 3$

c)



$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2}$$

d)



$$\Leftrightarrow \quad 0 \le x < \frac{1}{2}.$$

Bài 37

Tìm m để các bất phương trình sau đúng với mọi x :

a) $3x^2 - mx + m^2 + 1 > 0$

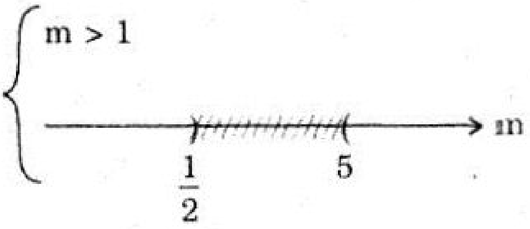
b) $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$

c) $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0$.

Giải

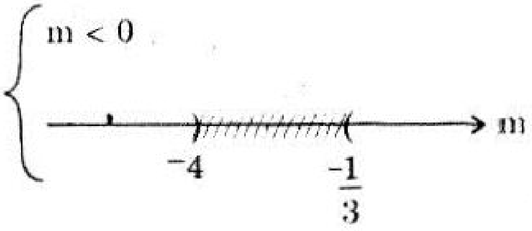
a) $\forall m$.

b) $\begin{cases} m - 1 > 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 11m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \quad m > 5.$

c) $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 3m^2 + 13m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \quad m < -4.$

Bài 38

Với giá trị nào của tham số m, các bất phương trình sau vô nghiệm ?

a) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$

b) $(m - 3)x^2 + (m + 2)x - 4 > 0$.

Giải

a) Bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 6m - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7.$$

b) $-22 \leq m \leq 2$.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1+ 2. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Tìm mệnh đề đúng :

A. $a < b \Rightarrow ac < bc$ B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

C. $a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$ D. Cả A, B, C đều sai.

2. Tìm mệnh đề sai :

A. $|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b$ B. $|a - b| \leq |a| - |b|, \forall a, b$

C. $a^2 > 0, \forall a$ D. $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a$.

3. Cho a, b, c > 0. Xét các bất đẳng thức :

(I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

(II) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

(III) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$

Bất đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ I đúng B. Chỉ II đúng

C. Chỉ III đúng D. Cả I, II, III đều đúng.

4. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$.

Mệnh đề nào đúng ?

A. $x < y < z$ B. $y < x < z$ C. $z < x < y$ D. $x < z < y$.

5. Hai số a, b thỏa bất đẳng thức $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$ thì :

A. $a < b$ B. $a > b$ C. $a = b$ D. $a \neq b$.

6. Cho $a > b > 0$ và $x = \dfrac{1 + a}{1 + a + a^2}$, $y = \dfrac{1 + b}{1 + b + b^2}$.

Mệnh đề nào đúng ?

A. $x > y$ B. $x < y$

C. $x = y$ D. Không so sánh được.

7. Có bao nhiêu bộ số nguyên (x, y, z) thỏa bất đẳng thức :

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3.$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số.

8. Cho $a, b > 0$ và $ab > a + b$. Mệnh đề nào đúng ?

A. $a + b = 4$ B. $a + b > 4$

C. $a + b < 4$ D. Một kết quả khác.

9. Cho $a, y > 0$. Tìm bất đẳng thức sai ?

A. $(x + y)^2 \geq 4xy$ B. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x + y}$

C. $\dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{4}{(x + y)^2}$

D. Có ít nhất một trong ba đẳng thức trên sai.

10. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba đẳng thức : (I) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

(II) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{9}{x + y + z}$

(III) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \geq 3$

Đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ I đúng B. Chỉ I và III đúng

C. Cả ba đều đúng D. Chỉ III đúng.

11. Tìm mệnh đề sai sau đây với a, b, c, d > 0 :

A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} < \frac{c}{d}$

D. Có ít nhất một trong ba mệnh đề trên sai.

12. Cho a, b, c > 0 và $P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < P < 1$ B. $2 < P < 3$

C. $1 < P < 2$ D. Một kết quả khác.

13. Cho a, b, c, d và $A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{d}{a+b+c}$.

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < A < 1$ B. $1 < A < 2$

C. $2 < A < 3$ D. Một kết quả khác.

14. Cho a, b, c, d và $A = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$.

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < A < 1$ B. $1 < A < 2$

C. $2 < A < 3$ D. Một kết quả khác.

15. Cho tam giác ABC và $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $0 < P < 1$ B. $1 < P < 2$

C. $2 < P < 3$ D. Một kết quả khác.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. Giải bất phương trình : $(2x-3)^2 . (3x-4)^3 . (5x+2) \leq 0$

cho tập nghiệm là $-\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$ đúng hay sai ?

A. Đúng B. Sai.

2. Cho bất phương trình : $\frac{8}{3-x} > 1$ (1)

Một học sinh giải như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3-x} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 3-x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Hỏi học sinh này giải đúng hay sai ?

A. Đúng B. Sai.

3. Giải bất phương trình : $\frac{3x^2+x}{1-3x} \geq 1 - x$. Cho ta tập nghiệm là :

A. $x \geq \frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{3}$ D. Đáp số khác.

4. Cho bất phương trình : $mx + 2m^2 \geq 2x + 8$ (*)

Xét các mệnh đề sau :

(I) Bất phương trình tương đương với $x > -2(2+m)$.

(II) Một điều kiện cần để mọi $x \geq -12$ là nghiệm của bất phương trình (*) là $m \geq 2$.

(II) Giá trị của m để (*) thỏa $\forall x \geq -12$ là $m = 2 \vee m \geq 4$.

Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ (I) B. Chỉ (II)

C. (II) và (III) D. (I), (II) và (III).

5. Cho bất phương trình : $m^3(x+2) \leq m^2(x-1)$

Xét các mệnh đề sau :

(I) Bất phương trình tương đương với $x(m-1) \leq -(2m+1)$.

(II) Với $m = 0$, bất phương trình thỏa $\forall x \in R$.

(III) Giá trị của m để bất phương trình thỏa $\forall x \geq 0$ là

$$-\frac{1}{2} \leq m < 1 \vee m = 0.$$

Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ (II) B. (I) và (II)

C. (I) và (III) D. (I), (II) và (III).

6. Định m để hai bất phương trình sau tương đương :

$$x - 3 < 0 \quad \text{và} \quad mx - m - 4 < 0.$$

A. $m = 0$ B. $m = 2$ C. $m = \frac{5}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$.

7. Cho bất phương trình : $\sqrt{1 - x}.(mx - 2) < 0$ (*)

Xét các mệnh đề sau :

(I) Bất phương trình tương đương với $mx - 2 < 0$.

(II) $m \geq 0$ điều kiện cần để mọi $x < 1$ là nghiệm của bất phương trình (*) là $m \geq 2$.

(III) $m < 0$ tập nghiệm của bất phương trình là $\frac{2}{m} < x < 1$.

Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ (I) B. Chỉ (III)

C. (II) và (III) D. (I), (II) và (III).

8. Định m để hệ sau vô nghiệm : $\begin{cases} \dfrac{8}{3 - x} > 1 \\ x \geq 3 - mx \end{cases}$ $(m \geq -1)$

A. $-1 < m < 0$ B. $-1 \leq m \leq 0$

C. $-1 \leq m < 0$ D. Đáp số khác.

9. Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} mx \leq m - 3 \\ (m + 3)x \geq m - 9 \end{cases}$

A. $m = 1$ B. $m = -2$

C. $m = 2$ D. Đáp số khác.

10. Cho hệ bất phương trình : $\begin{cases} x - 7 \le 0 \\ mx \ge m + 1 \end{cases}$

Xét các mệnh đề sau :

(I) Với $m < 0$ hệ luôn có nghiệm

(II) Với $0 \le m < \dfrac{1}{6}$ hệ vô nghiệm

(III) Với $m = \dfrac{1}{6}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ (I) B. (II) và (III)

C. Chỉ (III) D. (I), (II) và (III).

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Cho phương trình : $x^2 + 2(m + 2)x - 2m - 1 = 0$ (1).

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm. Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $m \le -5$ hay $m \ge -1$ B. $m < -5$ hay $m > -1$

C. $-5 \le m \le -1$ D. $m \le 1$ hay $m \ge 5$.

2. Cho $f(x) = 3x^2 + 2(2m - 1)x + m + 4$. Tìm m để f(x) dương với mọi x. Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $m < -1$ hay $m > \dfrac{11}{4}$ B. $-1 < m < \dfrac{11}{4}$

C. $-\dfrac{11}{4} < m < 1$ D. $-1 \le m \le \dfrac{11}{4}$.

3. Cho $f(x) = -2x^2 + (m - 2)x - m + 4$. Tìm m để f(x) không dương với mọi x. Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $m \in \varnothing$ B. $m \in R\setminus\{6\}$ C. $m \in R$ D. $m =$

4. Cho $f(x) = -2x^2 + (m + 2)x + m - 4$. Tìm m để f(x) âm với mọi x. Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $m \in (-14; 2)$ B. $m \in [-14; 2]$

C. $m \in (-2; 14)$ D. $m < -14$ hay $m > 2$.

5. Cho bất phương trình : $(2m + 1)x^2 + 3(m + 1)x + m + 1 > 0$ (1).

Với giá trị nào của m bất phương trình trên vô nghiệm. Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $m \neq -\dfrac{1}{2}$ B. $m \in (-5; -1)$

C. $m \in [-5; -1]$ D. $m \in \varnothing$.

6. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng :

(I) Với mọi $x \in [1; 5]$, $f(x) = x^2 - 7x + 6 \leq 0$

(II) Với mọi $x \in [1; 3] \cup [5; 6]$, $g(x) = x^2 - 8x + 15 \geq 0$

(III) $h(x) = x^2 - 8x + 15 \leq 0$, với mọi $x \in [3; 5]$.

A. Chỉ có (I) B. Chỉ có (III)

C. Chỉ có (I) và (III) D. Cả (I), (II) và (III).

7. Khi xét dấu biểu thức : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 1}$ ta có :

A. $f(x) > 0$ khi $(-7 < x < -1$ hay $1 < x < 3)$

B. $f(x) > 0$ khi $(x < -7$ hay $-1 < x < 1$ hay $x > 3)$

C. $f(x) > 0$ khi $(-1 < x < 0$ hay $x > 1)$

D. $f(x) > 0$ khi $(x > -1)$.

8. Khi xét dấu biểu thức : $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là :

A. $-1 \leq x < 2$

B. $\left(-3 < x \leq -\dfrac{4}{3} \text{ hay } -1 \leq x \leq 1\right)$

C. $\dfrac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x < 3$

D. $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $x \geq 1$.

9. Hệ bất phương trình : $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ có nghiệm là :

A. $-1 \le x < 1$ hay $\frac{3}{2} < x \le \frac{5}{2}$

B. $-2 \le x < 1$

C. $-4 \le x \le -3$ hay $-1 \le x < 3$

D. $-1 \le x \le 1$ hay $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$.

10. Trong khi giải bài toán : Xác định m để hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \le 0 \\ x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m \le 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất, một học sinh đã tìm ra kết quả sau. Hãy chọn kết quả đúng :

A. $m = 0$

B. $m = 7$

C. $m = 0$ hay $m = 7$

D. $0 \le m \le 7$.

11. Tìm m để phương trình : $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m = 0$

B. $m < -1$ hay $m > -\frac{2}{3}$

C. $m > -\frac{2}{3}$.

D. $1 < m < -\frac{2}{3}$.

12. Xác định m để với mọi x ta có : $-1 \le \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

Hãy chỉ ra kết quả đúng trong các kết quả sau đây :

A. $-\frac{5}{3} \le m < 1$

B. $1 < m \le \frac{5}{3}$

C. $m \le -\frac{5}{3}$

D. $m < 1$.

13. Phương trình : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 4m - 5 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2 < x_1 < x_2$.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :

A. $-2 < m < -1$

B. $m > 1$

C. $-5 < m < -3$

D. $-2 < m < 1$.

14. Xác định m để phương trình : $(x - 1)[x^2 + 2(m + 3)x + 4m + 12] = 0$

có ba nghiệm phân biệt lớn hơn –1.

A. $m < -\frac{7}{2}$

B. $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$

D. $-\frac{7}{2} < m < -3$.

15. Xác định m để phương trình :

$$(m - 3)x^3 + (4m - 5)x^2 + (5m + 4)x + 2m + 4 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

A. $-\frac{25}{8} < m < 0$ hay $m > 3$

B. $\left(-\frac{25}{8} < m < 0 \text{ hay } m > 3\right)$ và $m \neq 4$

C. $m \in \varnothing$

D. $0 < m < \frac{5}{4}$.

16. Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 + (x + 1)^2 = \frac{a}{x^2 + x + 1} \quad (1).$$

A. $a > -\frac{3}{16}$

B. $a \geq -\frac{3}{8}$

C. $-\frac{1}{4} \leq a < -\frac{3}{16}$

D. $-\frac{1}{4} \leq a < -\frac{3}{16} \vee a \geq \frac{3}{8}$.

Chương VI

THỐNG KÊ

A. LÍ THUYẾT

§1. Các khái niệm cơ bản

1. Thống kê là gì ?

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí dữ liệu.

2. Mẫu và dấu hiệu

Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là **mẫu**. Số phần tử của một mẫu được gọi là **kích thước mẫu**. Dãy các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là **mẫu số liệu**.

Nếu thực hiện điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là *điều tra toàn bộ*. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là *điều tra mẫu*.

§2. Trình bày một mẫu số liệu

1. Bảng phân phối tần số - tần suất

Tần số của giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong cuộc điều tra. Tần số của giá trị được kí hiệu là n_i.

Tần suất của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i với tổng số n các phần tử điều tra. Tần suất của giá trị x_i được kí hiệu là f_i.

Từ bảng số liệu ban đầu ta lọc ra các giá trị của biến lượng và tần số tương ứng của mỗi giá trị ấy, rồi sắp xếp lại thành bảng phân phối tần số – tần suất và được trình bày theo hai cách sau :

– Trình bày ngang :

Giá trị của x	x_1	x_2	x_3	…	x_m
Tần số	n_1	n_2	n_3	…	n_m

- Trình bày đứng :

Giá trị của x	Tần số
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3
...	...
x_m	n_m

Đôi khi trong bảng trình bày đứng ta còn thêm một cột nữa dành cho tần suất :

Giá trị của x	Tần số	Tần suất
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
x_3	n_3	f_3
...	...	...
x_m	n_m	f_m
	Tổng n	Tổng 100%

2. Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp :

Nếu mẫu điều tra có kích thước lớn (nhiều phần tử) hoặc biến lượng lấy nhiều giá trị quá gần nhau thì người ta thường nhóm các giá trị đó thành từng lớp và lập bảng phân phối tần số – tần suất, khi đó bảng này được gọi là bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp.

Mỗi lớp [a, b] có bề rộng bằng b – a, a là cận dưới, b là cận trên (a < b).

Giá trị trung tâm của một lớn bằng trung bình cộng của hai cận của lớp đó. Giá trị trung tâm của một lớp dùng để đại diện cho lớp đó.

Thông thường một bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp được trình bày như sau :

Giá trị của x (được chia lớp)	Giá trị trung tâm (của lớp)	Tần số	Tần suất
$x_0 \to x_1$	a_1	n_1	f_1
$x_1 \to x_2$	a_2	n_2	f_2
$x_2 \to x_3$	a_3	n_3	f_3
...	...	...	...
$x_{m-1} \to x_m$	a_m	n_m	f_m
		Tổng n	Tổng 100%

3. Biểu đồ :

Để trình bày mẫu số liệu một cách trực quan sinh động, dễ hiểu và gây ấn tượng, người ta sử dụng các biểu đồ. Sau đây là một số biểu đồ thông dụng :

a) Biểu đồ hình cột tần số – tần suất :

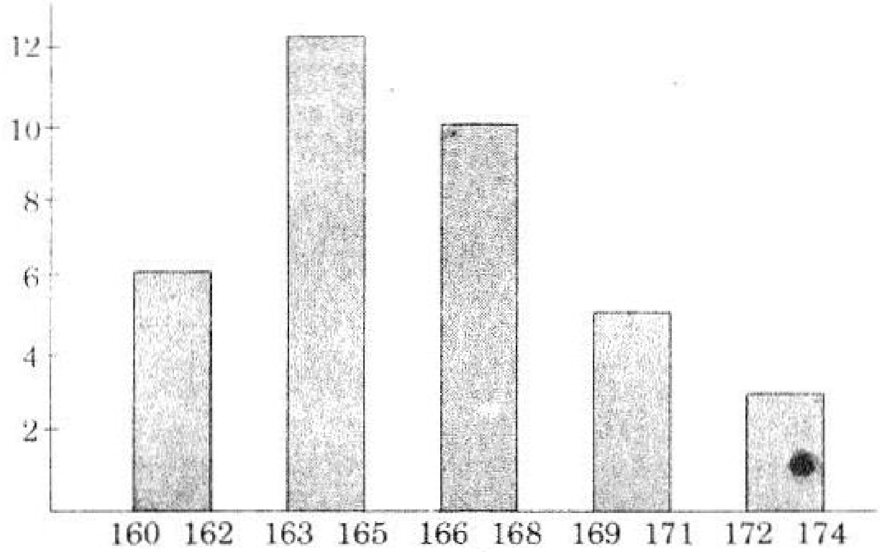
Biểu đồ hình cột là một cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp.

Ví dụ : Xét bảng sau :

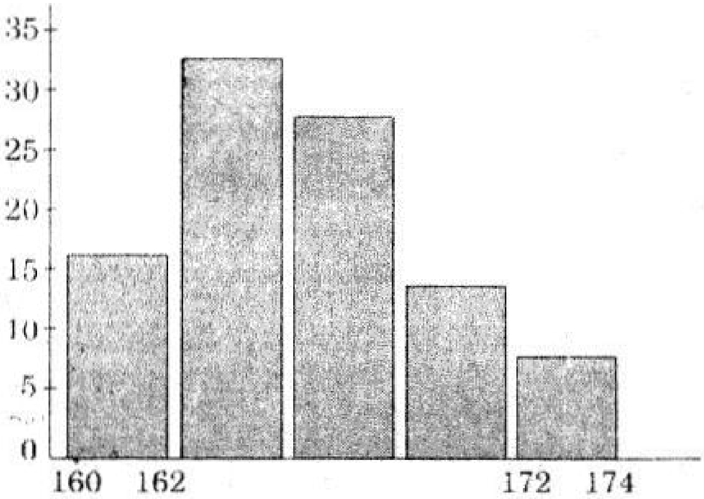
Lớp	Khoảng	Tần số
1	160 – 162	6
2	163 – 165	12
3	166 – 168	10
4	169 – 171	5
5	172 – 174	3
		n = 36

Cách vẽ biểu đồ hình cột thể hiện số liệu của bảng trên như sau : Vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các khoảng xác định nhóm.

Tại mỗi khoảng ta dựng lên một cột hình chữ nhật với đáy là khoảng đó, còn chiều cao bằng tần số của nhóm mà khoảng đó xác định. Hình thu được gọi là *biểu đồ cột tần số*.



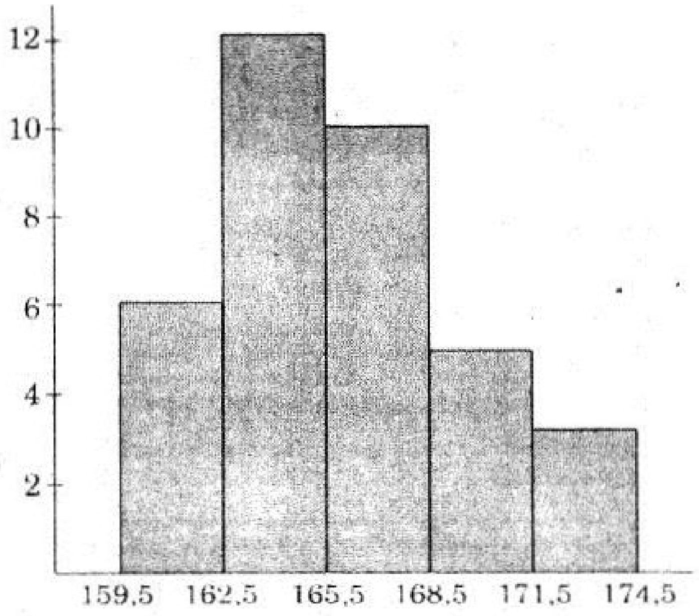
Chúng cũng có thể dùng biểu đồ hình cột để thể hiện bảng tần suất ghép lớp gọi là *biểu đồ hình cột tần suất*. Trong trường hợp này, cột hình chữ nhật sẽ có chiều cao bằng tần suất (tính theo %).



Ta cũng thể hiện bảng sau bằng biểu đồ hình cột tương tự như trên. Trong trường hợp này giữa các cột không có "khe hở". Ta gọi hình này là *tổ chức đồ (histogram)*.

Ví dụ : Xét bảng sau :

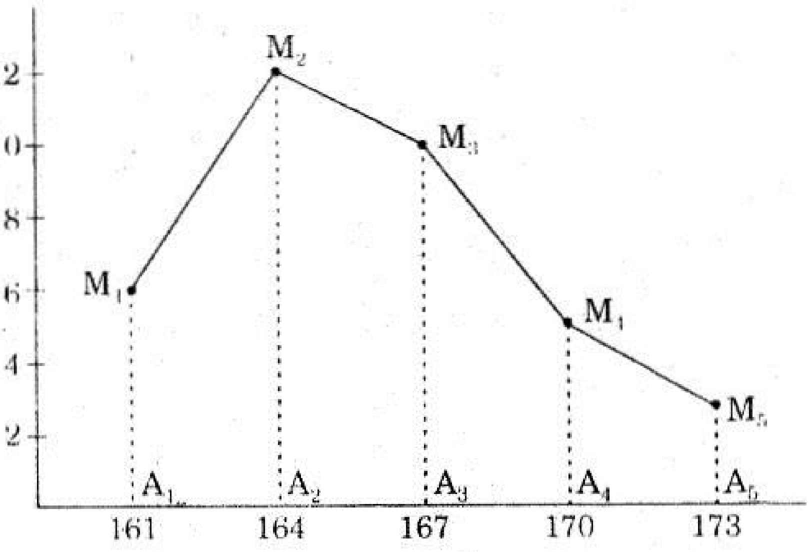
Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	159,5 – 162,5	6	16,7%
2	162,5 – 165,5	12	33,3%
3	165,5 – 168,5	10	27,7%
4	168,5 – 171,5	5	...
5	171,5 – 174,5	3	...
		n = 36	



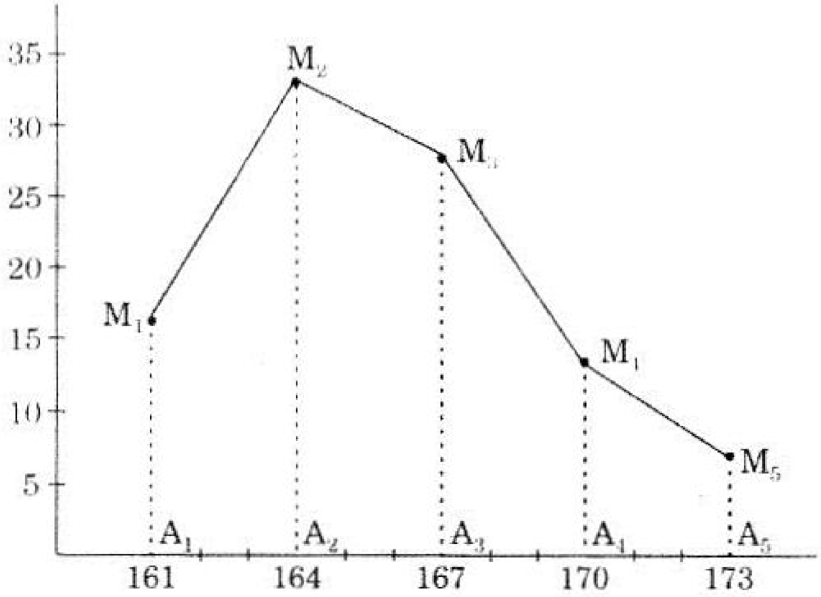
b) Biểu đồ đa giác tần số – tần suất :

Ta cũng có thể thể hiện bảng phân bố tần số bằng biểu đồ gọi là *biểu đồ đa giác tần số* như sau :

Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số), ta đánh dấu các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ở đó A_i là trung điểm của khoảng xác định nhóm thứ i (i = 1, 2, ..., 5). Tại mỗi điểm A_i, ta dựng đoạn thẳng A_iM_i vuông góc với đường thẳng nằm ngang và có độ dài bằng tần số của nhóm thứ i. Cụ thể là $A_1M_1 = 6, ..., A_5M_5 = 3$. Vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, ta được một đường gấp khúc gọi là *biểu đồ đa giác tần số.*



Nếu độ dài đoạn thẳng A_iM_i được lấy bằng tần suất của lớp thứ i thì khi vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, ta được một đường gấp khúc gọi là *biểu đồ đa giác tần suất.*



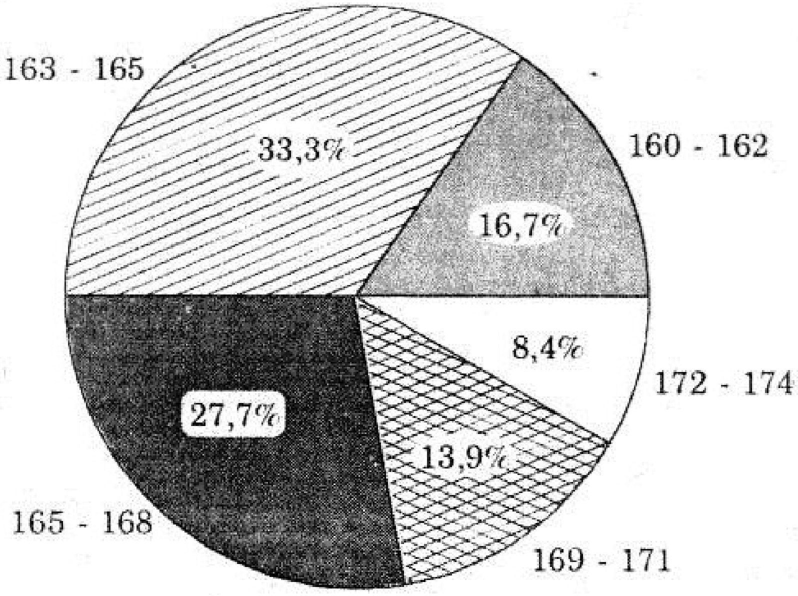
c) Biểu đồ hình quạt :

Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân phối tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỷ lệ với tần suất của nhóm đó.

Ví dụ : Xét bảng sau :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	160 – 162	6	16,7%
2	163 – 165	12	33,3%
3	166 – 168	10	27,7%
4	169 – 171	5	...
5	172 – 174	3	...
		n = 36	

Lớp thứ nhất (160 – 162) chiếm $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16{,}7\%$ số liệu, do đó hình quạt tương ứng sẽ chiếm $\frac{1}{6}$ hình tròn. Số đo góc của hình quạt này là $\frac{1}{6}$ của 360^0 tức là 60^0. Ta dùng thước đo góc để dựng hình quạt nói trên. Tương tự ta dựng hình quạt cho các lớp còn lại. Hình thu được gọi là *biểu đồ hình quạt*.



§3. Các số đặc trưng của một mẫu số liệu

1. Số trung bình :

- Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước n : $\{x_1, x_2, ..., x_3\}$. Ở lớp dưới ta đã biết *số trung bình* của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính bởi công thức :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}} \qquad (1)$$

Để cho gọn, kí hiệu tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n$ là : $\sum_{i=1}^{n} x_i$ và đọc là "Tổng của các x_i với I chạy từ 1 đến n". Với kí hiệu này, công thức (1) viết gọn là :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng một bảng phân bố tần số. Khi đó số trung bình được tính bởi công thức :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_ix_i} \qquad (2)$$

Trong đó n_i là tần số của số liệu x_i ($i = 1, 2, ..., m$) :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} n_j = n}$$

- Giả sử mẫu số liệu kích thước n được cho dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp. Các số liệu được chia thành m lớp ứng với m khoảng có độ dài bằng nhau. Gọi x_i là trung điểm của khoảng thứ i, ta có :

Nhóm	Khoảng	Trung điểm	Tần số
1	$a_1 - a_2$	x_1	n_1
2	$a_3 - a_4$	x_2	n_2
...	...	...	...
m	$a_{2m-1} - a_{2m}$	x_m	n_m
			$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$

Trong đó, số trung bình của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}$$

2. Số trung vị :

- Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn đối với nhau thì số lượng trung bình khó có thể đại diện cho các số liệu trong mẫu. Có một chỉ số khác thích hợp hơn trong trường hợp này. Đó là *số trung vị*.

- Giả sử ta có một mẫu gồm n số liệu được xếp theo thứ tự không giảm. Nếu n là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là số trung vị. Nếu n là số chẵn, ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ làm số trung vị.

3. Mốt :

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là *mốt* của mẫu số liệu và kí hiệu là m_0.

Chú ý :

Một bảng phân bố tần số có thể có hai hay nhiều mốt.

Ví dụ : Một cửa hàng bán 6 loại quạt với giá tiền là 100, 150, 300, 350, 400, 500 (nghìn đồng). Số quạt cửa hàng bán ra trong mùa hè vừa qua được thống kê trong bảng tần số sau :

Giá tiền	100	150	300	350	400	500
Số quạt bán được	256	353	534	300	534	175

Ta thấy bảng tần số trên có hai mốt là 300 và 400. Đó là giá tiền hai loại quạt mà khách hàng mua nhiều nhất.

4. Phương sai và độ lệch chuẩn :

Để đo mức độ biến động, chênh lệch giữa các giá trị của dấu hiệu, người ta ra một chỉ tiêu gọi là phương sai.

Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước n : $\{x_1, ..., x_n\}$. Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau :

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \qquad (3)$$

Trong đó, $\overline{x}$ là số trung bình của mỗi số liệu.

Căn số học bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s. Ta có :

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$$

Chú ý :

- Trong công thức (3), ta thấy phương sai là trung bình cộng tổng các bình phương khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Như vậy, phương sai đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu xung quanh số trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán càng lớn.
- Công thức (3) có thể biến đổi thành :

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad (4)$$

- Nếu số liệu được cho dưới dạng bảng phân bố tần số thì phương sai được tính bởi công thức :

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_i x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{m}n_i x_i\right)^2} \qquad (5)$$

5. Hệ số biến thiên :

Khi ta muốn so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu mà hai mẫu số liệu này hoặc có số trung bình khác xa nhau, hoặc đơn vị của chúng khác nhau thì ta dùng một số đo gọi là hệ số biến thiên. Có thể coi hệ số biến thiên là độ phân tán tương đối của mẫu số liệu.

Hệ số biến thiên (tính theo %) là số giữa độ lệch chuẩn và số trung bình :

$$\boxed{\frac{s}{\overline{x}}.100\%}.$$

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

Thống kê điểm thi môn Toán trong kì thi vừa qua của 400 em học sinh cho ta kết quả sau đây :

Điểm bài thi (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	...	1,5%
1	15	3,75%
2	43	10,75%
3	53	13,25%
4	85	21,15%
5	...	18%
6	55	...
7	33	...
8	18	...
9	10	...
10	10	...
	N = 400	... .

Bảng 1

Điền tiếp các số vào các chỗ trống (...) ở cột tần số và cột tần suất trong bảng 1.

Giải

Điểm bài thi (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	6	1,5%
1	15	3,75%
2	43	10,75%
3	53	13,25%
4	85	21,25%
5	72	18%
6	55	13,75%
7	33	8,25%
8	18	4,5%
9	10	2,5%
10	10	2,5%
	N = 400	100%

Bài 2

Hãy điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất trong bảng sau :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	159,5 – 162,5	6	16,7%
2	162,5 – 165,5	12	33,3%
3	165,5 – 168,5	10	27,7%
4	168,5 – 171,5	5	...
5	171,5 – 174,5	3	...
		N = 36	...

Giải

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	160 – 162	6	16,7%
2	163 – 165	12	33,3%
3	166 – 168	10	27,8%
4	169 – 171	5	13,9%
5	172 – 174	3	8,3%
		N = 36	100%

Bài 3

Cho bảng số liệu thống kê

Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) *năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào*

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45	35
25	45	30	30	30	40	30	25	45	45	
35	35	30	40	40	40	35	35	35	35	

a) Hãy lập :

- Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc ;
- Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy đưa ra nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Giải

a) • Bảng phân phối thực nghiệm *tần số* rời rạc :

Năng suất lúa hè thu năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào

Năng suất lúa x_i (tạ/ha)	25	30	35	40	45	Cộng
Tần số n_i	4	7	9	6	5	31

Bảng 1

• Bảng phân phối thực nghiệm *tần suất* rời rạc :

Năng suất lúa hè thu năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào

Năng suất lúa x_i (tạ/ha)	25	30	35	40	45	Cộng
Tần số n_i	12,9	22,6	29,0	19,4	16,1	100(%)

Bảng 2

b) • Dựa vào bảng 2, ta có nhận xét sau :

Các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào đoạn [30 ; 40], với tỉ lệ là 71% (22.6% + 29,0% + 19,4% = 71%). Trong đó, số 35 chiếm tỉ lệ cao nhất. Như vậy, trong 31 tỉnh được khảo sát, đa số (trên 50%) các tỉnh đạt năng suất lúa hè thu năm 1998 từ 30 tạ/ha đến 40 tạ/ha.

• Dựa vào bảng 1, ta có nhận xét :

Các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào đoạn [30 ; 40] với tổng tần số là 22 (trong 31 số liệu đã cho). Trong đó, số 35 có tần số cao nhất. Như vậy, trong 31 tỉnh được khảo sát, đa số (hơn một nửa) các tỉnh đạt năng suất lúa hè thu năm 1998 từ 30 tạ/ha đến 40 tạ/ha.

Bài 4

Cho bảng số liệu thống kê

Thời gian (phút) hoàn thành một bài tập toán của mỗi học sinh lớp 10A

20,8	20,7	23,1	20,7	20,9	20,9	23,9	21,6
25,3	21,5	23,8	20,7	23,3	19,8	20,9	20,1
21,3	24,2	22,0	23,8	24,1	21,1	22,8	19,5
19,7	21,9	21,2	24,2	24,3	22,2	23,5	23,9
22,8	22,5	19,9	23,8	25,0	22,9	22,8	22,7

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau :

[19,5 ; 20,5) ; [20,5 ; 21,5) ; [21,5 ; 22,5)
[22,5 ; 23,5) ; [23,5 ; 24,5) ; [24,5 ; 25,5].

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê đã cho.

Giải

a) *Thời gian hoàn thành một bài tập toán của 40 học sinh lớp 10A*

Các lớp giá trị của thời gian X (phút)	x_i^0	Tần số n_i	Tần suất f_i (%)
[19,5 ; 20,5)	20	5	12,5
[20,5 ; 21,5)	21	10	25,0
[21,5 ; 22,5)	22	5	12,5
[22,5 ; 23,5)	23	8	20,0
[23,5 ; 24,5)	24	10	25,0
[24,5 ; 25,5]	25	2	5,0
Cộng		40	100 (%)

Bảng 3

b) Dựa vào bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, ta có nhận xét sau :

Các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào nửa khoảng [20,5 ; 24,5), với tỉ lệ là 82,5% (25% + 12,5% + 20% + 25% = 82,5%). Trong đó, các số liệu thống kê thuộc nửa khoảng [20,5 ; 21,5) và thuộc nửa khoảng [23,5 ; 24,5) là chiếm tỉ lệ ngang nhau và cùng cao nhất. Như vậy, trong 40 học sinh được khảo sát, đa số (trên 50%) các học sinh có thời gian hoàn thành một bài tập toán từ 20,5 phút đến dưới 24,5 phút.

Bài 5

Cho bảng số liệu thống kê

Giá trị thành phẩm quy ra tiền (đơn vị : nghìn đồng) *trong 30 ngày sản xuất của một phân xưởng hóa chất*

180	186	190	204	192	200	201	203	191	202
200	212	205	211	240	213	216	208	209	222
221	220	203	225	206	228	231	220	239	210

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, với các lớp sau

[180 ; 192) ; [192 ; 204) ; [204 ; 216)
[216 ; 228) ; [228 ; 240].

b) Biết rằng định mức lao động của phân xưởng là "mỗi ngày phải sản xuất được tối thiểu 204 nghìn đồng", hãy xác định xem số ngày mà phân xưởng hoàn thành định mức lao động chiếm một tỉ lệ bao nhiêu phần trăm (trong 30 ngày được khảo sát).

Giải

a) ***Giá trị thành phẩm quy ra tiền của 30 ngày sản xuất trong một phân xưởng hóa chất***

Các lớp giá trị của thành phẩm Y (nghìn đồng)	y_i^0	Tần suất f_i (%)
[180 ; 192)	186	13,3
[192 ; 204)	198	23,4
[204 ; 216)	210	30,0
[216 ; 228)	222	20,0
[228 ; 240]	234	13,3
Cộng		100 (%)

Bảng 4

b) 63,3%.

Bài 6

Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số – tần suất sau :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	1 – 10	5	...
2	11 – 20	29	...
3	21 – 30	21	...
4	31 – 40	16	...
5	41 – 50	7	...
6	51 – 60	2	...
		N = 80	...

a) Điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất.

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số.

c) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất.

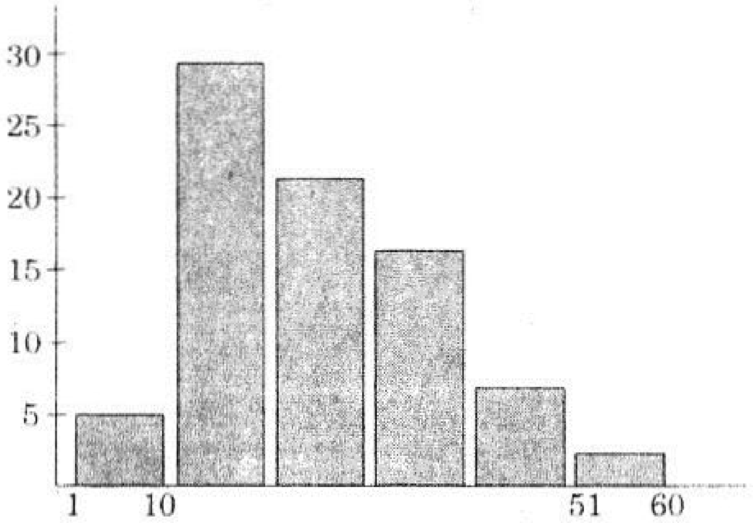
d) Vẽ biểu đồ hình quạt.

Giải

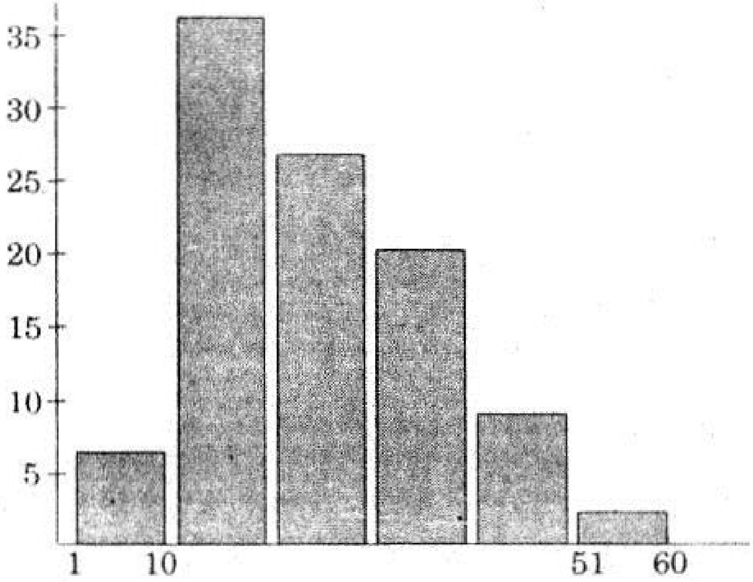
a)

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	1 – 10	5	6,25%
2	11 – 20	29	36,25%
3	21 – 30	21	26,25%
4	31 – 40	16	20%
5	41 – 50	7	8,75%
6	51 – 60	2	2,5%
		N = 80	100%

b) Biểu đồ hình cột tần số.

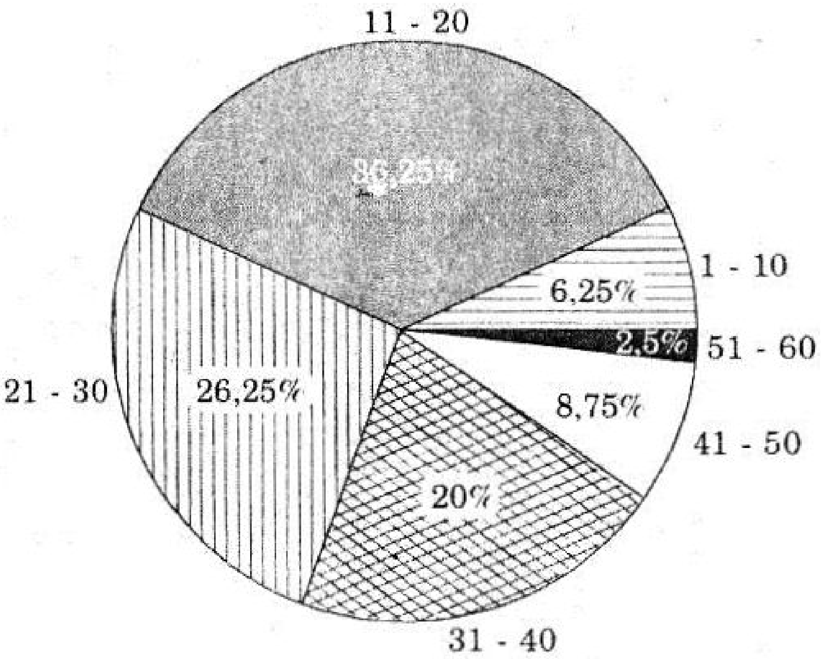


c) Biểu đồ hình cột tần suất được vẽ tương tự trong đó chiều cao cột là tần suất (tính theo %).



d) Để vẽ biểu đồ hình quạt, trước hết ta phải tính góc ở tâm của 6 hình quạt tương ứng với 6 nhóm. Muốn tính góc ở tâm của một nhóm ta lấy 360 nhân với tần suất của nhóm đó. Biểu đồ hình quạt được vẽ như sau :

Khoảng	Góc ở tâm
1 – 10	$22{,}5^0$
11 – 20	$130{,}5^0$
21 – 30	$94{,}5^0$
31 – 40	72^0
41 – 50	$31{,}5^0$
51 – 60	9^0



Bài 7

Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ty trong một tháng như sau (đơn vị triệu đồng) :

120 ; 121 ; 129 ; 114 ; 95 ; 88 ; 109 ; 147 ; 118 ; 148 ; 128 ; 71 ; 93 ; 67 ; 62 ; 57 ; 103 ; 135 ; 97 ; 166 ; 83 ; 114 ; 66 ; 156 ; 88 ; 64 ; 49 ; 101 ; 79 ; 120 ; 75 ; 113 ; 155 ; 48 ; 104 ; 112 ; 79 ; 87 ; 88 ; 141 ; 55 ; 123 ; 152 ; 60 ; 83 ; 144 ; 84 ; 95 ; 90 ; 27.

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu, đơn vị điều tra ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số – tần suất ghép lớp gồm bảy lớp : lớp đầu tiên là khoảng 26,5 – 48,5, lớp tiếp theo là khoảng 48,5 – 70,5, ...

c) Vẽ tổ chức đồ.

Giải

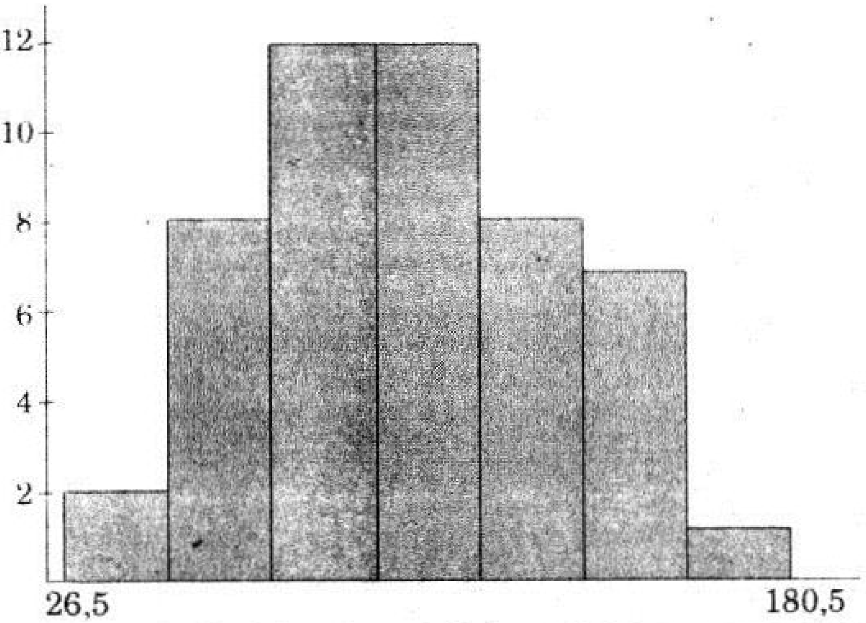
a) Đơn vị điều tra : Cửa hàng.

Dấu hiệu : Doanh thu của một cửa hàng trong một tháng.

b) Sau đây là bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	26,5 – 48,5	2	4%
2	48,5 – 70,5	8	16%
3	70,5 – 92,5	12	24%
4	92,5 – 114,5	12	24%
5	114,5 – 136,5	8	16%
6	136,5 – 158,5	7	14%
7	158,5 – 180,5	1	2%
		N = 50	

c) Tổ chức đồ :



Bài 8

Cho bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp sau :

Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh
từ 1961 đến hết 1990 (30 năm)

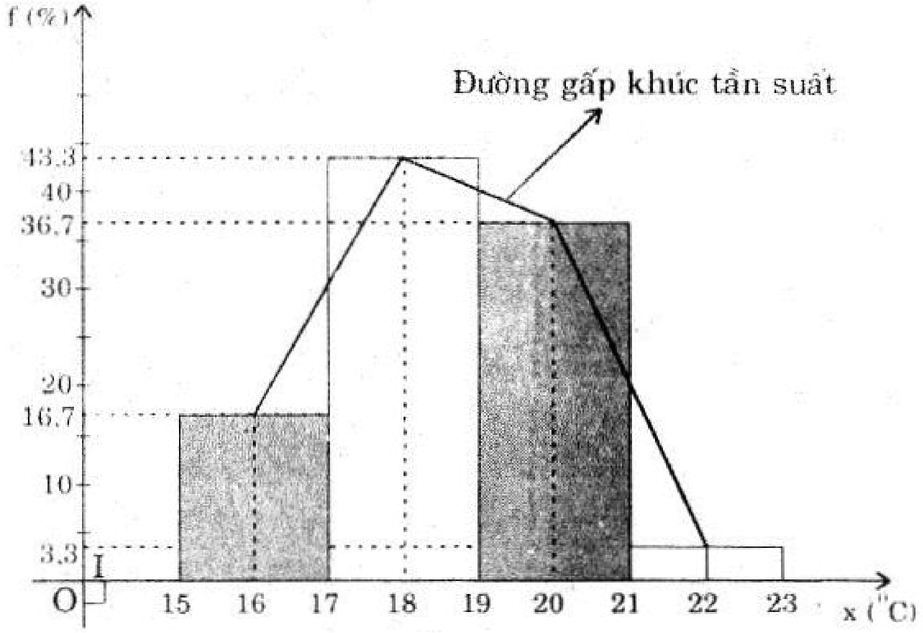
Các lớp của nhiệt độ X (^{0}C)	x_i^0	Tần suất f_i (%)
[15 ; 17)	16	16,7
[17 ; 19)	18	43,3
[19 ; 21)	20	36,7
[21 ; 23]	22	3,3
Cộng		100 (%)

Hãy mô tả bảng 5 bằng cách vẽ

a) Biểu đồ tần suất hình cột ;

b) Đường gấp khúc tần suất.

Giải



Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến hết 1990 (30 năm)

Bài 9

a) Hãy mô tả bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 5 bằng cách vẽ

- Biểu đồ tần suất hình cột ;
- Đường gấp khúc tần suất.

b) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột, hãy nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Giải

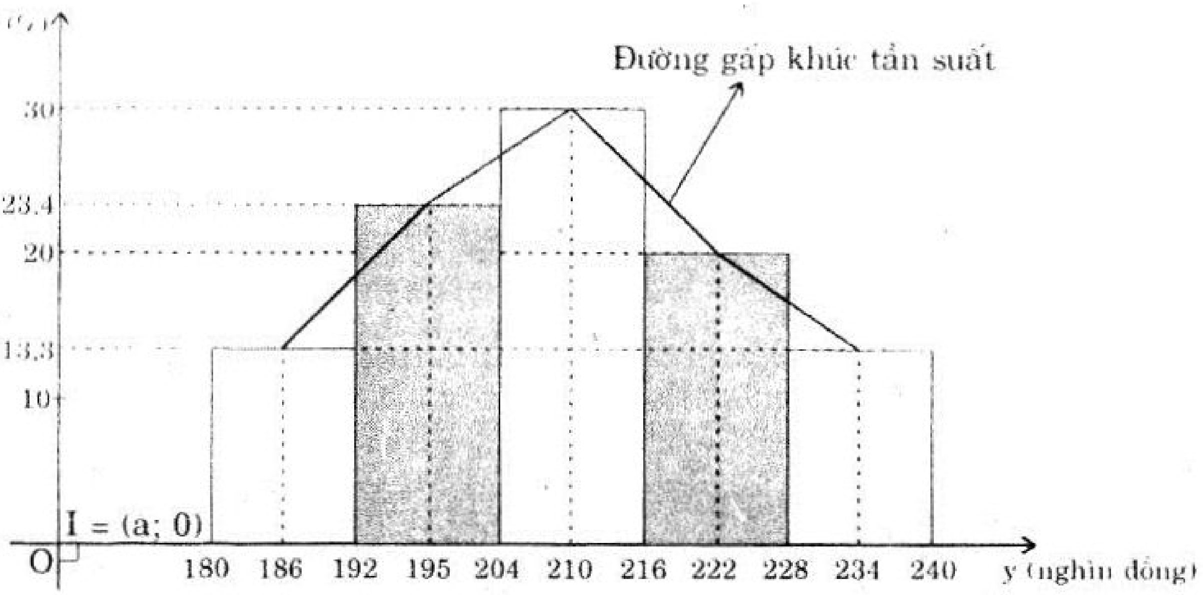
b) Xu hướng tập trung của các số liệu thống kê được phản ánh bởi hình ảnh cao trội lên của 3 hình chữ nhật (3 cột liền nhau), tương ứng với các tần suất có tổng bằng :

$$23.4\% + 30\% - 20\% = 73{,}4\% \text{ (lớn hơn 50\%)}.$$

Từ đó ta có nhận xét sau :

Trong 30 ngày sản xuất được khảo sát, đa số (trên 50%) các ngày có thành phẩm quy ra tiền từ 192 nghìn đồng đến dưới 228 nghìn đồng.

a)



Giá trị thành phẩm quy ra tiền của 30 ngày sản xuất ở một phân xưởng hóa chất

Bài 10

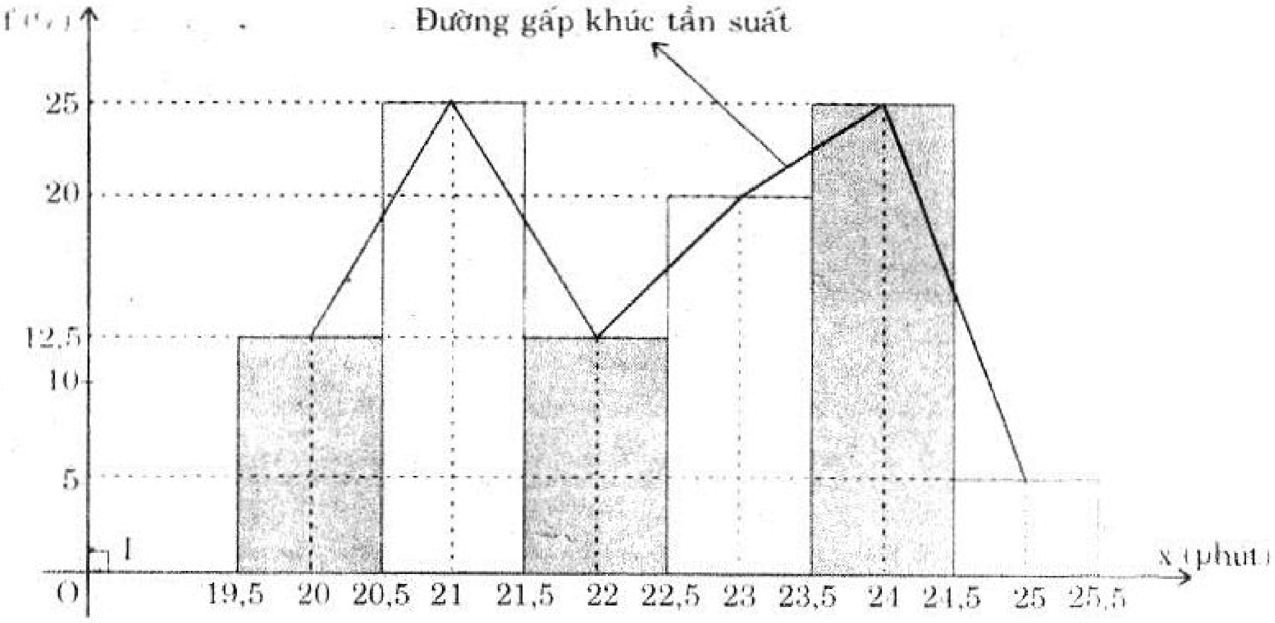
Xét bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 30.

a) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất (để mô tả bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp).

b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số (để mô tả bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp).

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột đã được vẽ ở câu a), hãy nêu rõ trong 40 học sinh được khảo sát, số các em có thời gian hoàn thành một bài tập toán từ 19,5 phút đến dưới 23,5 phút chiếm bao nhiêu phần trăm ?

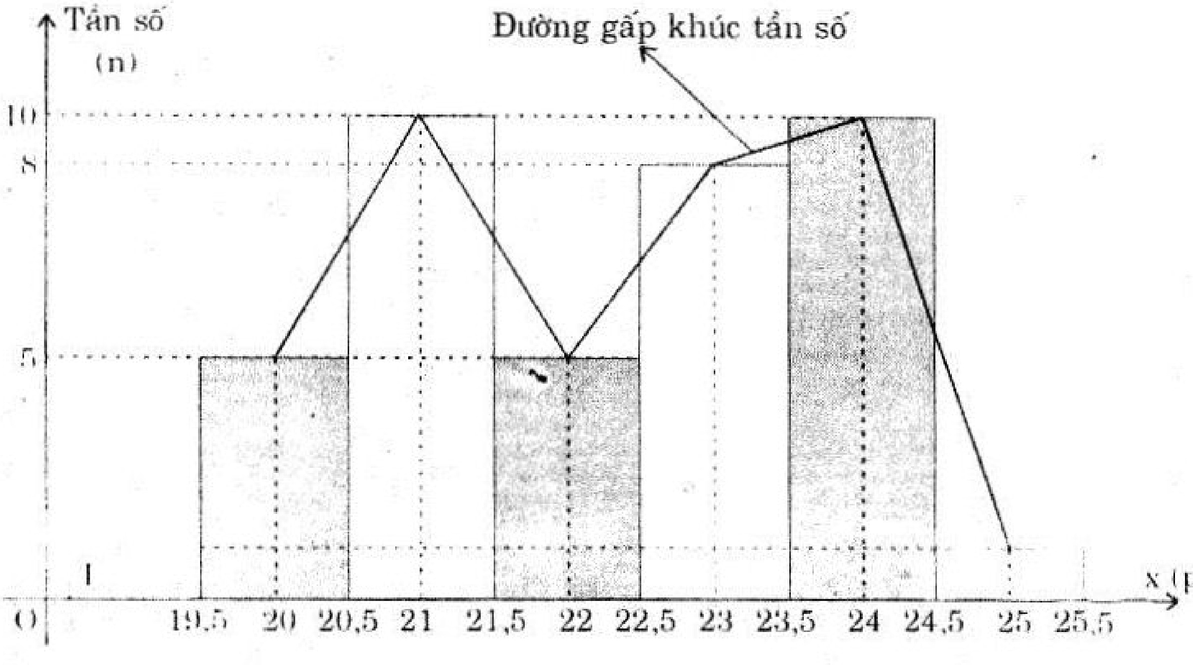
Giải



Thời gian hoàn thành một bài tập toán của 40 học sinh lớp 10A

(Biểu đồ tần suất và đường gấp khúc tần suất)

b)



Thời gian hoàn thành một bài tập toán của 40 học sinh lớp 10A

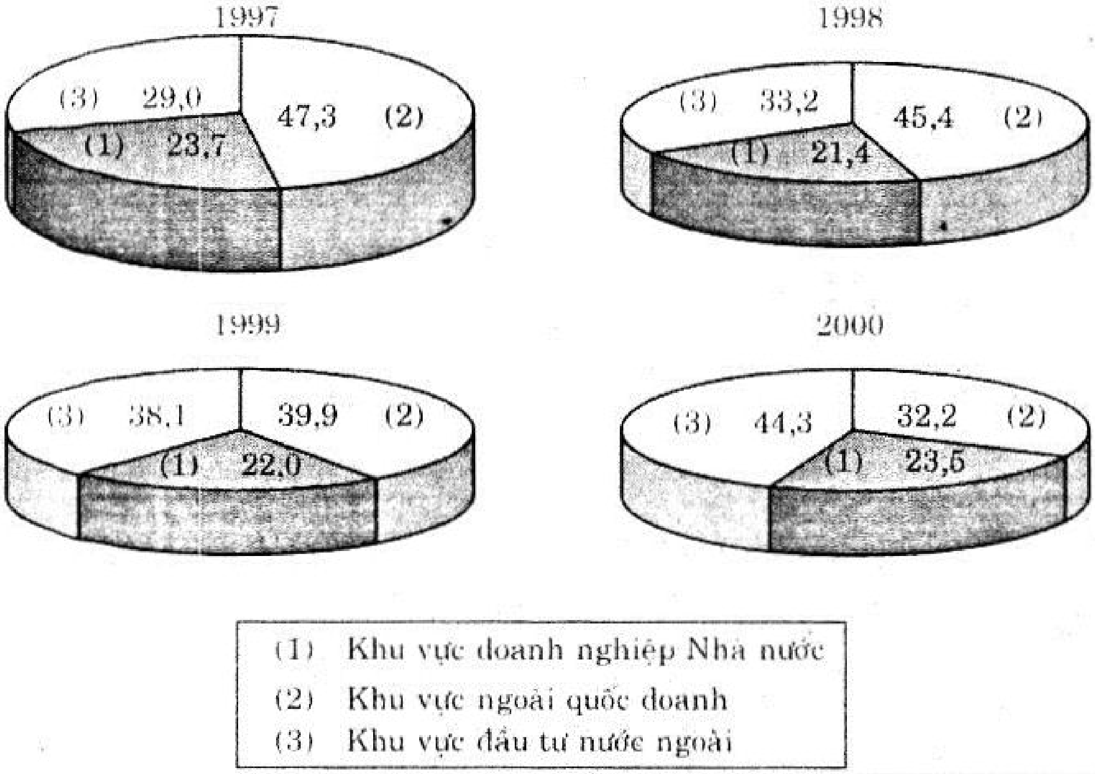
(Biểu đồ tần số và đường gấp khúc tần số)

c) 70%.

Bài 11

Trong hình dưới đây, xét biểu đồ hình quạt ứng với năm 1998. Dựa vào biểu đồ đó, hãy lập bảng cơ cấu theo mẫu bảng 6.

CƠ CẤU GIÁ TRỊ SẢN XUẤT CÔNG NGHIỆP
PHÂN THEO THÀNH PHẦN KINH TẾ (%)


1997
(3) 29,0
47,3 (2)
(1) 23,7
1998
(3) 33,2
45,4 (2)
(1) 21,4
1999
(3) 38,1
39,9 (2)
(1) 22,0
2000
(3) 44,3
32,2 (2)
(1) 23,5
(1) Khu vực doanh nghiệp Nhà nước
(2) Khu vực ngoài quốc doanh
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài

Giải

Cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước, năm 1999, phân theo thành phần kinh tế

Các thành phần kinh tế	Tỉ trọng (%)
1. Khu vực doanh nghiệp Nhà nước	22,0
2. Khu vực ngoài quốc doanh	39,9
3. Khu vực đầu tư nước ngoài	38,1
Cộng	100%

Bài 12

Cho hai bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp

Năng suất lúa năm 1985 của 31 thửa ruộng ở địa phương A

Các lớp giá trị của X (tạ/ha)	x_i^0	Tần số n_i
[15,50 ; 20,50)	18	3
[20,50 ; 25,50)	23	10
[25,50 ; 30,50)	28	11
[30,50 ; 35,50]	33	7
Cộng		31

Năng suất lúa năm 1985 của 32 thửa ruộng ở địa phương B

Các lớp giá trị của Y (tạ/ha)	y_i^0	Tần số n_i
[17,50 ; 22,50)	20	3
[22,50 ; 27,50)	25	7
[27,50 ; 32,50)	30	11
[32,50 ; 37,50)	35	8
[37,50 ; 42,50]	40	3
Cộng		32

a) Hãy tính các số trung bình cộng $\overline{x}, \overline{y}$.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy xét xem trong năm 1985, năng suất lúa ở địa phương nào (địa phương A hay địa phương B) là cao hơn ?

Giải

a) $\overline{x} = 26{,}5$ tạ/ha ;

$\overline{y} = 30{,}2$ tạ/ha.

b) Vì $\overline{y} > \overline{x}$, nên có thể nói rằng trong năm 1985, năng suất lúa ở địa phương B cao hơn ở địa phương A.

Bài 13

Kết quả học tập của hai học sinh An và Bình trong năm học vừa qua như sau :

Môn	Điểm TB của An	Điểm TB của Bình
Toán	8	8,5
Vật lí	7,5	9,5
Hóa học	7,8	9,5
Sinh học	8,3	8,5
Văn học	7	5
Lịch sử	8	5,5
Địa lí	8,2	6
Anh văn	9	9
Thể dục	8	9
Kĩ thuật	8,3	8,5
Giáo dục công dân	9	10

Tính điểm trung bình (không kể hệ số) các môn học của An và của Bình. Theo em, bạn nào học khá hơn ?

Giải

Điểm trung bình các môn học của An là 8,1. Điểm trung bình các môn học của Bình là 8,09 (chính xác đến hàng phần trăm). An và Bình có điểm trung bình xấp xỉ nhau. Tuy nhiên An học đều các môn còn Bình thì học giỏi các môn Tự nhiên và học trung bình ở các môn Xã hội.

Bài 14

Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây :

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	N = 40

a) Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

Trước hết ta tính

$$\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 884, \ \sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 = 19598.$$

Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là

$$\bar{x} = \frac{884}{40} = 22{,}1 \text{ (tạ)}.$$

Theo công thức (5), ta có phương sai là

$$s^2 = \frac{19598}{40} - \left(\frac{884}{40}\right)^2 = 1{,}54 \text{ (tạ}^2\text{)}.$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{1{,}54} \approx 1{,}24$ (tạ).

Bài 15

Đo chiều cao của 36 học sinh của một trường, ta có mẫu số liệu sau, sắp xếp theo thứ tự tăng (đơn vị là cm) :

160 ; 161 ; 161 ; 162 ; 162 ; 162 ; 163 ; 163 ; 163 ; 164 ; 164 ; 164 ;

164 ; 165 ; 165 ; 165 ; 165 ; 165 ; 166 ; 166 ; 166 ; 166 ; 167 ; 167 ;

168 ; 168 ; 168 ; 168 ; 169 ; 169 ; 170 ; 171 ; 171 ; 172 ; 172 ; 174.

Tìm số trung vị của mẫu số liệu này.

Giải

Số liệu đứng thứ 18 là 165, đứng thứ 19 là 166. Do vậy số trung vị là

$$\frac{165 + 166}{2} = 165{,}5 .$$

Bài 16

100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau :

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) Số trung bình là 15,23.

b) Số trung vị là 15,50 (vì số liệu đứng thứ 50 là 15, số liệu đứng thứ 51 là 16). Mốt là 16. Như vậy, có khoảng một nửa học sinh có điểm dưới 15,5 và số học sinh đạt 16 điểm là nhiều nhất.

c) Phương sai là 3,96. Độ lệch chuẩn là 1,99.

Bài 17

179 củ khoai tây được chia thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số sau đây :

Lớp	Khoảng	Tần số
1	10 – 19	1
2	20 – 29	14
3	30 – 39	21
4	40 – 49	73
5	50 – 59	42
6	60 – 69	13
7	70 – 79	9
8	80 – 89	4
9	90 – 99	2

Tính khối lượng trung bình của một củ khoai tây.

Giải

Lớp	Khoảng	Trung điểm	Tần số
1	10 – 19	14,5	1
2	20 – 29	24,5	14
3	30 – 39	34,5	21
4	40 – 49	44,5	73
5	50 – 59	54,5	42
6	60 – 69	64,5	13
7	70 – 79	74,5	9
8	80 – 89	84,5	4
9	90 – 99	94,5	2
			N = 179

Từ đó khối lượng trung bình của một củ khoai tây là 48,35g.

Bài 18

Người ta đo chiều cao của 50 cây lim trong một cánh rừng lim, làm tròn các số đo đến đơn vị là mét (m), sau đo lập bảng phân phối thực nghiệm tần số thì thu được bảng

Chiều cao của 50 cây lim

Chiều cao x_i (m)	9	10	11	12	13	14	Cộng
Tần số n_i	6	7	10	10	9	8	50

Hãy tìm mốt M_0 của bảng phân phối thực nghiệm đã cho.

Giải

$$M_0 = \frac{11+12}{2} = 11{,}5 \text{ (m)}.$$

Bài 19

Người ta đã tiến hành thăm dò nhu cầu của khách hàng về các mẫu thứ 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ra ở một nhà máy M. Dưới đây là bảng phân phối thực nghiệm tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

Mẫu thứ x_i	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số n_i	2100	1860	1950	2000	2090	10000

a) Hãy tìm mốt M_0 của bảng phân phối thực nghiệm đã cho.

b) Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào ?

Giải

a) Mốt M_0 là mẫu thứ 1.

b) Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu thứ 1.

Bài 20

Điều tra viên thu thập được hai mẫu số liệu với dấu hiệu điều tra là mức thu nhập của mỗi người trong một tháng : trên mẫu thứ nhất, đơn vị điều tra là những người làm nghề A và trên mẫu thứ hai là những người làm nghề B. Số trung bình của mẫu thứ nhất là 4 triệu đồng với độ lệch chuẩn là 0,4 triệu. Số trung bình của mẫu thứ hai là 2,1 triệu đồng với độ lệch chuẩn là 0,24 triệu. Tính hệ số biến thiên của hai mẫu số liệu này.

Giải

Hệ số biến thiên của mẫu thứ nhất là

$$\frac{0,4}{4}.100\% = 10\%.$$

Hệ số biến thiên của mẫu thứ hai là

$$\frac{0,24}{2,1}.100\% \approx 11,34\%.$$

Vậy sự chênh lệch tương đối về mức thu nhập hàng tháng của những người làm nghề A nhỏ hơn những người làm nghề B.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Công việc nào sau đây không thuộc vào các công việc của môn thống kê ?

A. Thu thập số liệu

B. Trình bày số liệu

C. Phân tích và xử lý số liệu

D. Ra quyết định dựa trên số liệu.

2. Trong thống kê về số học sinh trong mỗi lớp học ở bậc trung học phổ thông của thành phố Hồ Chí Minh, tìm phát biểu sai trong các mệnh đề :

A. Mỗi lớp là một đơn vị điều tra

B. Tập hợp các lớp của trường là một mẫu

C. Số học sinh trong một lớp là kích thước của mẫu

D. Nếu chỉ điều tra trên một trường thì đó là điều tra mẫu.

3. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây :

2 4 2 1 3 5 1 1 2 3

1 2 2 3 4 1 1 2 3 4

Kích thước của mẫu là bao nhiêu ?

A. 5 B. 20 C. 4 D. 100.

4. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây :

2 4 2 1 3 5 1 1 2 3

1 2 2 3 4 1 1 2 3 4

Dấu hiệu ở đây là gì ?

A. Số gia đình ở tầng 2

B. Số con ở mỗi gia đình

C. Số tầng của chung cư

D. Số người trong mỗi gia đình.

5. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây :

2 4 2 1 3 5 1 1 2 3

1 2 2 3 4 1 1 2 3 4

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên ?

A. 4 B. 20 C. 10 D. 5.

6. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80 85 65 65 70 50 45 100 45 100

100 100 80 70 65 80 50 90 120 160

40 70 65 45 85 100 85 100 75 50

Kích thước của mẫu là bao nhiêu ?

A. 30 B. 160 C. 40 D. 100.

7. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80 85 65 65 70 50 45 100 45 100

100 100 80 70 65 80 50 90 120 160

40 70 65 45 85 100 85 100 75 50

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên ?

A. 12 B. 10 C. 30 D. 160.

8. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Giá trị lớn nhất của dấu hiệu là bao nhiêu ?

A. 30 B. 160 C. 100 D. 190.

9. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Giá trị nhỏ nhất của dấu hiệu là bao nhiêu ?

A. 30 B. 10 C. 40 D. 45.

10. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Hãy chọn số gia đình có mức tiêu thụ 80 Kw/h một tháng ?

A. 30 B. 40 C. 3 D. 4.

11. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụ dưới 60 Kw/h một tháng ?

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9.

12. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở một khu phố X, người ta thu được mẫu số liệu sau :

80 85 65 65 70 50 45 100 45 100

100 100 80 70 65 80 50 90 120 160

40 70 65 45 85 100 85 100 75 50

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụ trên 110 Kw/h một tháng ?

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0.

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

Dùng cho câu 1, 2.

Thống kê điểm thi môn Toán trong một kì thi của 400 em học sinh.

1. Người ta thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 5$ là bao nhiêu ?

A. 72% B. 36% C. 18% D. 10%.

2. Người ta thấy số bài được điểm 10 chiếm tỉ lệ 2,5%. Hỏi tần số của giá trị $x_i = 10$ là bao nhiêu ?

A. 10 B. 20 C. 25 D. 5.

Dùng cho câu 3, 4, 5.

Cho bảng tần số – tần suất ghép lớp như sau :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	160 – 162	6	16,7%
2	163 – 165	12	33,3%
3	166 – *	**	27,8%
4	169 – 171	5	***
5	172 – 174	3	8,3%
		N = 36	100%

3. Hãy điền số thích hợp vào vị trí * :

A. 167 B. 168 C. 169 D. 164.

4. Hãy điền số thích hợp vài vị trí ** :

A. 10 B. 12 C. 8 C. 13.

5. Hãy điền số thích hợp vào vị trí *** :

A. 3,9% B. 5,9% C. 13,9% D. 23,9%.

Dùng cho câu 6, 7, 8.

Trong một giải bóng đá học sinh, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đấu đáng chú ý nhất. Sau đây là bảng tần số – tần suất ghép lớp thu được :

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	50 – 124	3	12%
2	125 – 199	5	20%
3	200 – 274	7	28%
4	275 – 349	*	20%
5	350 – 424	3	***
6	425 – 499	2	8%
		N = **	100%

6. Hãy điền số thích hợp vào vị trí * :

A. 5 B. 10 C. 15 D. 25.

7. Hãy điền số thích hợp vài vị trí ** :

A. 100 B. 50 C. 25

D. Chưa xác định được.

8. Hãy điền số thích hợp vào vị trí *** :

A. 6% B. 12% C. 24% D. 14%.

9. Trong các loại biểu đồ sau, loại biểu đồ nào thích hợp nhất cho việc thể hiện bảng phân phối tần suất ghép lớp :

A. Biểu đồ hình quạt B. Biểu đồ hình cột

C. Tổ chức đồ D. Biểu thức đa giác tần số.

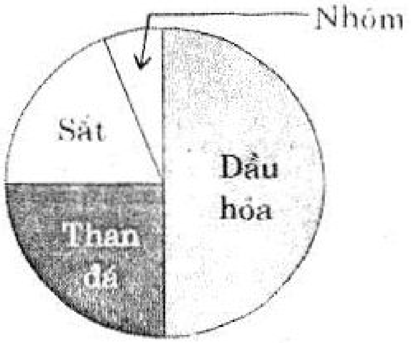
10. Trong các loại biểu đồ sau, loại nào cho thấy rõ nhất sự so sánh một thành phần với toàn thể :

A. Biểu đồ hình cột B. Tổ chức đồ

C. Biểu đồ đa giác tần số D. Biểu đồ hình quạt.

Dùng cho câu 11, 12.

Biểu đồ hình quạt của thống kê giá trị xuất khẩu của một nước là :



11. Nguyên liệu nào xuất khẩu nhiều nhất :

A. Dầu hỏa B. Than đá

C. Sắt D. Nhôm.

12. Cho biết giá trị xuất khẩu dầu hỏa 800 triệu USD. Hỏi giá trị xuất khẩu than đá là bao nhiêu triệu USD ?

A. 100 B. 200 C. 250 D. 400.

13. Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp :

Các lớp giá trị của X	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Mệnh đề đúng là mệnh đề :

A. Giá trị trung tâm của lớp [50 ; 52) là 53

B. Tần số của lớp [58 ; 60) là 95

C. Tần số của lớp [52 ; 54) là 35

D. Số 50 không phụ thuộc lớp [54 ; 56).

14. Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc :

x_i	1	2	3	4	5	6	Cộng
n_i	10	5	15	10	5	5	50

Mệnh đề đúng là mệnh đề :

A. Tần suất của số 4 là 20% B. Tần suất của số 2 là 20%

C. Tần số của số 5 là 45 D. Tần suất của số 5 là 90%.

15. Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp :

Các lớp giá trị của X	[50; 54)	[54; 58)	[58; 62)	[52; 66)	Cộng
Tần số n_i	15	65	15	5	100

Mệnh đề sai là mệnh đề :

A. Số 54 không thuộc [50 ; 54) B. Số 58 thuộc lớp [58 ; 62)

C. Tần suất của lớp [58 ; 62) là 50%

D. Giá trị trung tâm của lớp [62 ; 66) là 64.

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Cho mẫu số liệu thống kê {8, 10, 12, 14, 16}. Trung bình của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 12 B. 14 C. 13 D. 12,5.

2. Cho mẫu số liệu thống kê {28, 16, 13, 18, 12, 28, 22, 13, 19}. Trung vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 12 B. 17 C. 18 D. 19.

3. Cho mẫu số liệu thống kê {2, 4, 6, 8, 10}. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 6 B. 8 C. 10 D. 40.

4. Cho mẫu số liệu thống kê {6, 5, 5, 2, 9, 10, 8}. Mốt của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu ?

A. 5 B. 10 C. 2 D. 6.

5. Cho mẫu số liệu {10, 8, 6, 2, 4}. Tìm độ lệch chuẩn của mẫu :

A. 2,8 B. 8 C. 6 D. 2,4.

6. Tìm hệ số biến thiên của mẫu số liệu sau : {10, 2, 8, 4, 6}

A. 28,2% B. 0,28 C. 47,1% D. 0,47.

Để dùng cho câu 7, 8, 9, 10.

Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 49 thửa ruộng có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây :

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)						n = 40

7. Sản lượng trung bình của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 21 B. 22 C. 20 D. 22,1.

8. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 22 B. 2,4 C. 1,54 D. 1,24.

9. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 2,24 B. 22,1 C. 1,24 D. 22,24.

10. Hệ số biến thiên của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 5,6% B. 4,6% C. 4,6% D. 2,4%.

Để dùng chung cho câu 11, 12, 13.

100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả cho trong bảng sau :

Điểm (x)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số (n)	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

11. Trung bình của mẫu là bao nhiêu ?

A. 15 B. 15,23 C. 15,50 D. 16.

12. Tính số trung vị của mẫu ?

A. 14,23 B. 15,28 C. 15,50 D. 16,50.

13. Mốt của mẫu số liệu là bao nhiêu ?

A. 19 B. 9 C. 16 C. 15,50.

Đề dùng chung cho câu 14, 15, 16.

Số liệu sau đây cho ta lãi hàng tháng của một cửa hàng năm 2004 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

14. Tìm số trung bình của mẫu số liệu trên ?

A. 15,67 B. 15 C. 16 D. 17.

15. Số trung vị của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 15 B. 16,67 C. 16 D. 17.

16. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu ?

A. 121,98 B. 11,04 C. 48,39 D. 140,21.

17. Chọn câu đúng trong bốn phương án trả lời sau : Người ta xác định cân nặng của 10 học sinh và xếp thứ tự tăng dần. Số trung vị của 10 học sinh số liệu này là :

A. Khối lượng của học sinh thứ năm

B. Khối lượng của học sinh thứ sáu

C. Không tìm được trung vị

D. Khối lượng trung bình của em thứ năm và thứ sáu.

18. Chọn câu đúng trong bốn phương án trả lời sau đây : Độ lệch chuẩn là :

A. Bình phương của phương sai

B. Một nửa của phương sai

C. Căn số học bậc hai của phương sai

D. Không phải là các công thức trên.

Chương VII

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

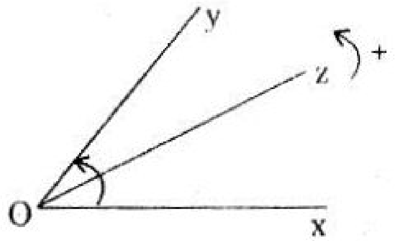
A. LÍ THUYẾT

§1. *Góc và cung lượng giác*

1. **Góc lượng giác (Ox, Oy)** theo thứ tự này là góc quét bởi tia Oz, theo một chiều nhất định từ Ox đến Oy.

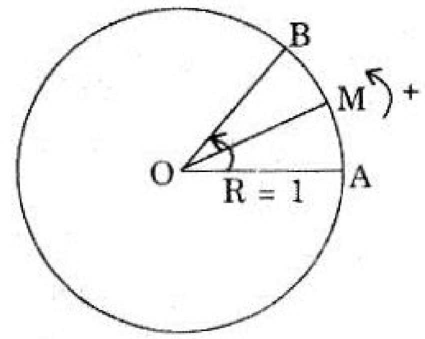
   Ox là *tia gốc.*

   Oy là *tia ngọn.*



2. **Đường tròn lượng giác** là đường tròn có bán kính bằng đơn vị và trên đó ta đã chọn một chiều làm chiều dương (+).

3. **Cung lượng giác** $\overset{\frown}{AB}$ với A, B là 2 điểm trên đường tròn lượng giác là cung vạch bởi điểm M di chuyển trên đường tròn lượng giác theo một chiều nhất định từ A đến B.



4. **Radian** là số đo của một cung có chiều dài bằng bán kính của đường tròn.

5. **Bảng so sánh** giữa hai đơn vị độ và radian :

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

6. **Số đo của góc và cung lượng giác :**

$$(Ox, Oy) = a^0 + k360^0 \quad (k \in Z)$$

$$(Ox, Oy) = \alpha + k2\pi \quad \text{(radian)}$$

$$\overset{\frown}{AB} = a^0 + k360^0$$

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi$$

7. Công thức đổi đơn vị :

$$\boxed{\frac{a^0}{180^0} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

8. Tính độ dài của một cung tròn :

Công thức tính độ dài của một cung tròn :

$$\boxed{l = R \cdot \alpha}$$

α tính bằng radian, l và R cùng đơn vị độ dài.

9. Số đo của góc và cung lượng giác :

Ta có : sđ(Ox, Oy) = $a^0 + k360^0$, $0^0 \le a^0 < 360^0$ và $k \in Z$

hay : sđ(Ox, Oy) = $\alpha + k2\pi$, $0 \le \alpha \le 2\pi$ và $k \in Z$

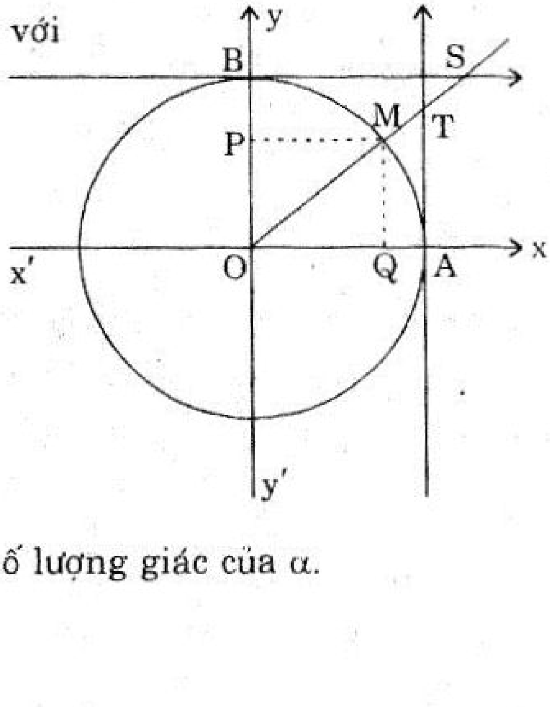
sđ $\overset{\curvearrowright}{AB}$ = sđ(OA, OB).

10. Tìm số đo tổng quát của góc (cung) lượng giác :

Tìm giá trị chính α và áp dụng công thức số đo của góc (cung) lượng giác.

§2. Các giá trị lượng giác của một góc hay một cung

1. Định nghĩa hàm số lượng giác :



Điểm M ở trên đường tròn lượng giác với

$\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi$ $(k \in Z)$

– *Ta định nghĩa :*

$\overline{OQ}$ = hoành độ của M = cosα

$\overline{OP}$ = tung độ của M = sinα

$\overline{AT}$ = tgα

$\overline{BS}$ = cotgα

cosα, sinα, tgα, cotgα là các hàm số lượng giác của α.

- *Nhận xét :* $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1, \quad \forall\alpha$

tgα xác định khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

cotgα xác định khi $\alpha \neq k\pi$

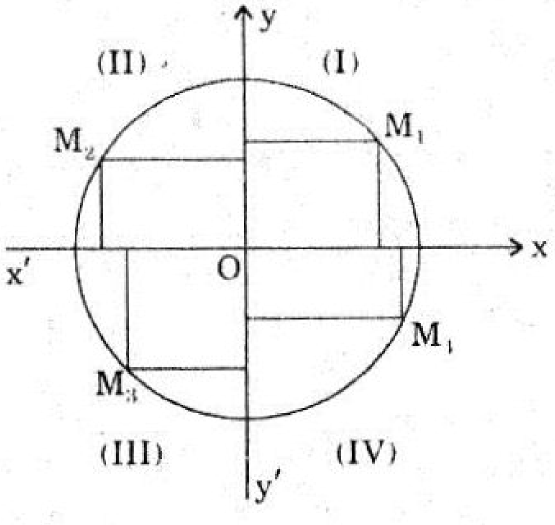
Hai góc (cung) hơn kém nhau $k2\pi$ thì có cùng các hàm số lượng giác.

2. Giá trị của hàm số lượng giác của những góc đặc biệt :

Góc / Hàm	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	46^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	0	$\Vert$	0
cotg	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\Vert$	0	$\Vert$

DẤU CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Cung phần tư / Hàm	I	II	III	IV
cos	+	–	–	+
sin	+	+	–	–
tg	+	–	+	–
cotg	+	–	+	–



3. Hệ thức cơ bản :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{tg}x \,.\, \text{cotg}x = 1$$

$$\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\text{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi) \qquad 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi)$$

4. Cung liên kết :

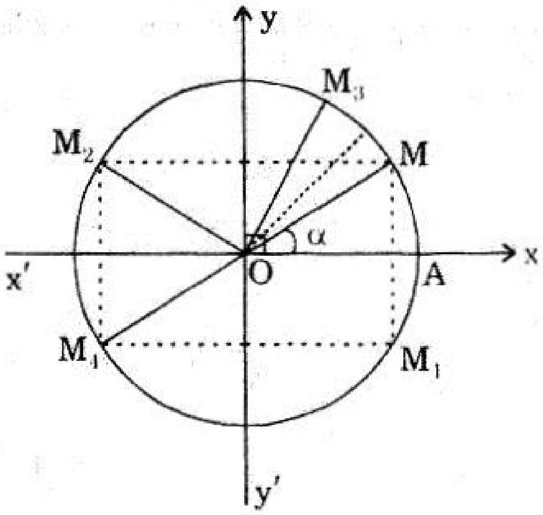
$$\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi$$

$$\overset{\curvearrowright}{AM_1} = -\alpha + k2\pi$$

$$\overset{\curvearrowright}{AM_2} = (\pi - \alpha) + k2\pi$$

$$\overset{\curvearrowright}{AM_3} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi$$

$$\overset{\curvearrowright}{AM_4} = (\pi + \alpha) + k2\pi.$$



* Cung đối :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\alpha$

* Cung bù :

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\alpha$

* Cung hơn kém π :

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\text{tg}(\pi + \alpha = \text{tg}\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg}\alpha$

* Cung phụ :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\alpha$

* Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \ ; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{cotg}\alpha \ ; \qquad \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha.$$

5. Khảo sát hàm số lượng giác :

5.1. Tìm miền xác định :

$y = \sin u$ xác định $\Leftrightarrow$ u xác định.

$y = \cos u$ xác định $\Leftrightarrow$ u xác định.

$y = \mathrm{tg}u$ xác định $\Leftrightarrow$ $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$y = \mathrm{cotg}u$ xác định $\Leftrightarrow$ $u \neq k\pi, k \in Z$.

5.2. Tìm chu kì của hàm số lượng giác :

- $y = f(x)$ tuần hoàn nếu $\exists l \neq 0 : f(x + l) = f(x), \forall x \in D_f$
- T chu kì $\Leftrightarrow$ T dương nhỏ nhất : $f(x + T) = f(x), \forall x \in D_f$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \end{array}\right\}$ chu kì $T = 2\pi$

$\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{tg}x \\ y = \mathrm{cotg}x \end{array}\right\}$ chu kì $T = \pi$

Tổng quát : Chu kì của $\sin(ax + b)$ và $\cos(ax + b)$ là $\frac{2\pi}{|a|}$

Chu kì của $\mathrm{tg}(ax + b)$ và $\mathrm{cotg}(ax + b)$ là $\frac{\pi}{|a|}$

5.3. Xét tính chẵn, lẻ :

- Chứng tỏ miền xác định D là tập hợp đối xứng.
- $\forall x \in D$:

Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn.

$f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ.

§3. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng :

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{1 - \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b} \quad \left(a; b; a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$$

$$\mathrm{tg}(a - b) = \frac{\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b}{1 + \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b} \quad \left(a; b; a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$$

2. Công thức nhân :

a) Công thức nhân đôi :

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\mathrm{tg}2a = \frac{2\mathrm{tg}a}{1 - \mathrm{tg}^2 a} \quad \left(a; 2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$$

b) Công thức tính theo cos2a :

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\mathrm{tg}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \quad \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$$

c) Công thức tính theo $\mathrm{tg}\frac{a}{2} = t$: $\left(\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right)$

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}; \qquad \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \qquad \mathrm{tg}a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

3. Công thức biến đổi :

a) Công thức biến tích thành tổng :

$$\sin a\,.\,\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\cos a\,.\,\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a\,.\,\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

b) Công thức biến tổng thành tích :

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\,.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\,.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\,.\cos b} \qquad (a;\, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$$

$$\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\,.\cos b} \qquad (a;\, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$$

4. Phương pháp giải toán về biến đổi lượng giác :

4.1. Tính giá trị biểu thức :

Phương pháp : Phân tích biểu thức cần tính :

- theo các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt.
- theo các hàm số lượng giác mà giả thiết cho biết giá trị.

4.2. Chứng minh đẳng thức :

Phương pháp : Thông thường ta phân tích vế phức tạp bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số và các công thức lượng giác theo hướng của vế còn lại.

Lưu ý : Có thể dùng phép biến đổi tương đương.

B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI

Bài 1

a) Đổi $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}$, 1 radian ra độ.

b) Đổi 35^0, $12^0 30'$ ra radian.

Giải

a) Ta có : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radian bằng } \frac{2.180^0}{3} = 120^0$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ radian bằng } \frac{3.180^0}{5} = 108^0$$

$$1 \text{ radian bằng } \frac{180}{\pi} \text{ độ} \approx 57^0 17' 45''.$$

b) Ta có : $a^0 = 35^0$

$$35^0 \text{ bằng } \frac{35.\pi}{180} \text{ radian} \approx 0{,}6109 \text{ radian}$$

$$12^0 35' = 12\frac{1}{2} \text{ độ bằng } \frac{\pi.12\frac{1}{2}}{180} \text{ radian} = \frac{5\pi}{72} \text{ radian}$$

$$\approx 0{,}2182 \text{ radian.}$$

Bài 2

Cho sđ(Ox, Oy) = $22^0 30' + k360^0$, $k \in Z$

a) Với k bằng bao nhiêu thì sđ(Ox, Oy) bằng $1822^0 30'$?

b) Góc có số đo $972^0 30'$ có phải là một trong các góc (Ox, Oy) không ?

Giải

a) $22^0 30' + k.360^0 = 1822^0 30' \quad \Rightarrow \quad k = 5 \in Z$

b) $22^0 30' + k.360^0 = 972^0 30' \quad \Rightarrow \quad k = \frac{950}{360} \notin Z$

Vậy giá trị này không phải là số đo (Ox, Oy).

Bài 3

Một bánh xe có bán kính R = 2,2m quay điểm một góc bằng $30^0 30'$. Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Giải

Ta có $30^0 30'$ ứng với 0,532 radian.

Theo công thức $l = R \,.\, \alpha = 2{,}2 \,.\, 0{,}532 \approx 1{,}2(m)$.

Vậy một điểm trên vành bánh xe đi được một đoạn là 1,2m.

Bài 4

Tìm giá trị tổng quát của góc (Ox, Oy) biết một số đo của góc (Ox, Oy) bằng $\frac{3\pi}{2} + 5\pi$.

Giải

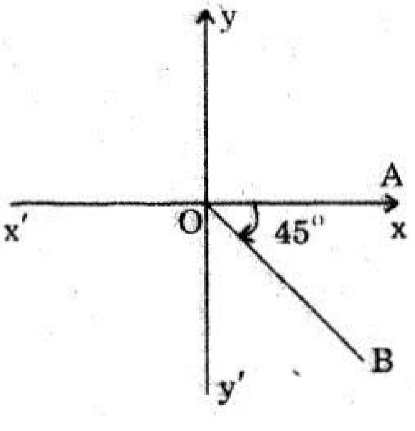
Ta có : $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 5\pi = \frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 3 \,.\, 2\pi$

Vậy : $sđ(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.

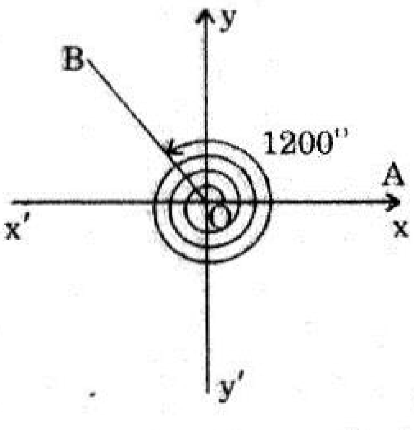
Bài 5

Trong mặt phẳng tọa độ, biểu diễn các góc lượng giác (OA, OB) có số đo sau đây : -45^0, 1200^0, -830^0.

Giải

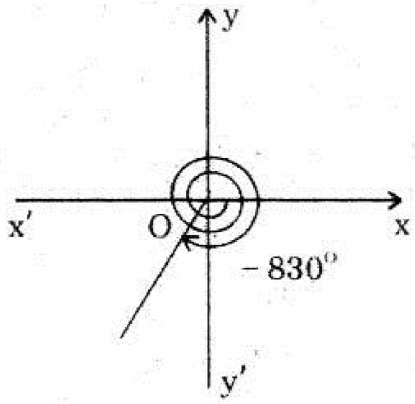


$(OA, OB) = -45^0$



$(OA, OB) = 1200^0 = 120^0 + 3 \,.\, 360^0$

Nhận xét : Nếu số đo lớn hơn 360^0 hay 2π thì ta chia số đo đó cho 360^0 hay 2π để viết dưới dạng $a^0 + k\, 360^0$ hay $\alpha + k\, 2\pi$ rồi vẽ tia ngọn có số đo a^0 hay α.



$$(OA, OB) = -830^0 = -110^0 - 2\,.\,360^0$$

Bài 6

Trên đường tròn lượng giác, ta lấy điểm A làm gốc. Định những điểm M biết số đo $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{3} + k\,.\,\frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có : $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{3} + k\,.\,\frac{2\pi}{4}$.

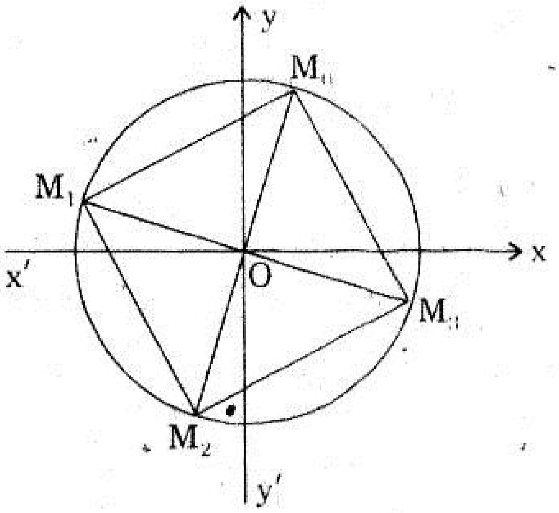
Có 4 ngọn cung phân biệt ứng với :

$k = 0 : \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{3}$;

$k = 1 : \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{5\pi}{6}$

$k = 2 : \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{4\pi}{3}$;

$k = 3 : \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{11\pi}{6}$



Trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn cung là đỉnh của hình vuông $M_0M_1M_2M_3$.

Bài 7

Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau dưới dạng một công thức tổng quát : $a = k\pi$ và $y = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Giải

Ta biểu diễn các điểm ngọn cung của $x = k\pi = k\,.\,\frac{2\pi}{2}$

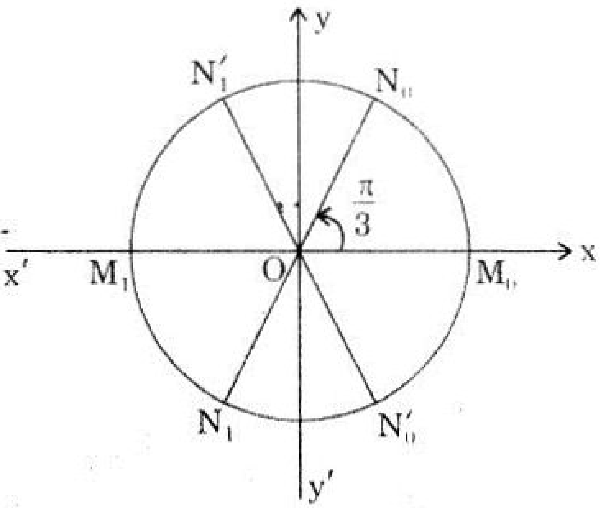
$k = 0 : x = 0$

$k = 1 : x = \pi$

Ta biểu diễn các điểm ngọn cung của $y = \pm\frac{\pi}{3} + k.\frac{2\pi}{2}$

$k = 0 : y = \pm\frac{\pi}{3}$

$k = 1 : y = \pm\frac{4\pi}{3}$


y
N'₁
N₀
π/3
x'
M₁
O
M₀
x
N₁
N'₀
y'

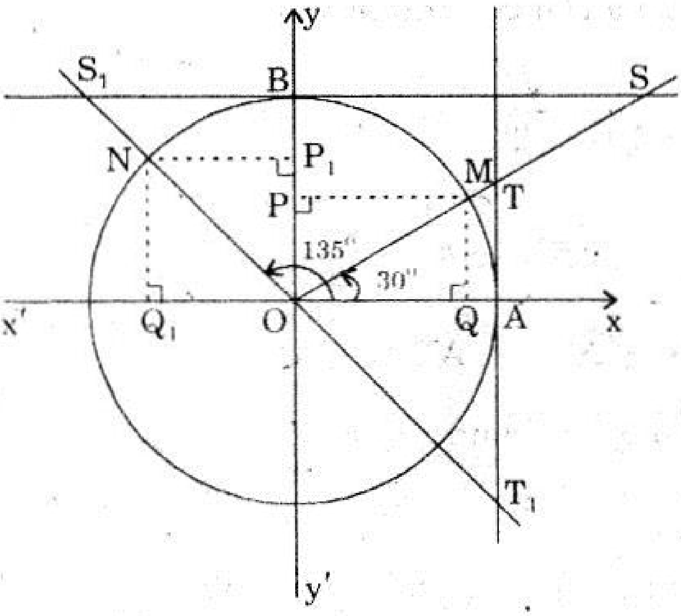
Trên đường tròn lượng giác, ta nhận thấy có 6 điểm ngọn cung phân biệt. Do đó công thức tổng quát là :

$$z = \frac{k2\pi}{6} = k\frac{\pi}{3}.$$

Bài 8

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác, sau đó tính giá trị các hàm số lượng giác của các cung : 30^0, 135^0.

Giải


y
S₁
B
S
N
P₁
M
T
P
135°
30°
x'
Q₁
O
Q
A
x
T₁
y'

sđ $\overset{\frown}{AM} = 30^0$

Ta có : $\cos30^0 = \overline{OQ} = OQ$

ΔOMQ là nửa tam giác đều, cạnh $OM = 1$ nên

$$OQ = \frac{OM\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^0 = \overline{OP} = OP = QM = \frac{OM}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \overline{AT} = AT$$

ΔOTA là nửa tam giác đều có cạnh OT và OA là đường cao, do đó :

$$OA = OT\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad OT = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy : $\operatorname{tg} 30^0 = AT = \frac{1}{2}OT = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\operatorname{cotg} 30^0 = \overline{BS} = BS$$

ΔOBS là nửa tam giác đều có cạnh là $OS = 2OB = 2$.

Vậy : $\operatorname{cotg} 30^0 = BS = OS\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AN} = 135^0,$$

$$\cos 135^0 = \overline{OQ_1} = -OQ_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vì ΔONQ_1 vuông cân có cạnh huyền $ON = 1$ nên :

$$OQ_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135^0 = \overline{OP_1} = OP_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^0 = \overline{AT_1} = -AT_1 = -1$$

Vì ΔOAT_1 vuông cân cạnh $OA = 1$.

$$\operatorname{cotg} 135^0 = \overline{BS_1} = -BS_1 = -1$$

Vì ΔOBS_1 vuông cân cạnh $S_1B = 1 = OB$.

Bài 9

Xác định điểm cuối của cung lượng giác α biết :

$$\cos\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Giải

Trên trục hoành lấy điểm I_0 sao cho $x_{I_0} = \frac{1}{2}$

Kẻ I_1I_2 // Oy (I_1I_2 đi qua I_0, I_1 và I_2 nằm trên đường tròn đơn vị).

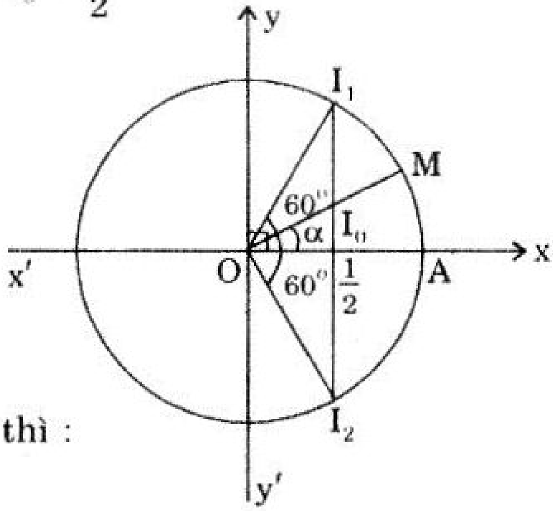
Ta nhận thấy :

$-60^0 + k360^0 \le \alpha \le 60^0 + k360^0$

Vậy : $\cos\alpha \ge \frac{1}{2}$.

Nếu điểm cuối của cung α thuộc $\overset{\frown}{I_1AI_2}$ thì :

$$\cos\alpha \ge \frac{1}{2}.$$



Bài 10

Tính $B = \dfrac{2\cos^2 0 - 3\sin^2\frac{\pi}{2}}{5\text{cotg}\frac{\pi}{4} + 3\sin\pi - 2\text{tg}\frac{\pi}{4}}$.

Giải

Thay giá trị các hàm số lượng giác những góc đặc biệt vào B, ta có :

$$B = \frac{2.(1)^2 - 3.(1)^2}{5.1 + 3.0 - 2.1} = -\frac{1}{3}.$$

Bài 11

a) Xét dấu $\sin50^0 . \cos(-300^0)$

b) Cho $0^0 < \alpha < 90^0$. Xét dấu của $\sin(\alpha + 90^0)$.

Giải

a) Ta có : $0^0 < 50^0 < 90^0$ nên $\sin50^0 > 0$

$-300^0 = 60^0 - 360^0$ nên $\cos(-300^0) > 0$

Vậy $\sin50^0 . \cos(-300^0) > 0$.

b) Ta có : $0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow 0^0 + 90^0 < \alpha + 90^0 < 90^0 + 90^0$

$90^0 < \alpha + 90^0 < 180^0$

Vậy $\sin(\alpha + 90^0) > 0$.

Bài 12

Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$ **c)** $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Giải

a) Áp dụng hằng đẳng thức :

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2\\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x.\end{aligned}$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3\\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)\\ &= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.\end{aligned}$$

c) Khi $a \neq k\pi$, ta có :

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} &\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x\\ &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x\\ &\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1.\end{aligned}$$

Bài 13

Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$

b) $B = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot g x) + \cos^2 x(1 + tg x)}$.

Giải

a) $A = \dfrac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$

b) $B = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x \operatorname{cotg} x + \cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{tg} x}$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + \cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|.$$

Bài 14

Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x, y ...

a) $A = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \sin^2 y} - \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cotg}^2 y$

b) $B = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x.$

Giải

a) $A = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \dfrac{\cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y}$

$$= \frac{\cos^2 x(1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\sin^2 y(\cos^2 x - 1)}{\sin^2 y \sin^2 x} = -1.$$

b) $B = 3[(\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2] + 4[(\cos^2 x)^3 - 2(\sin^2 x)^3] + 6\sin^4 x$

Đặt $t = \sin^2 x$ thì ta có $\cos^2 x = 1 - t$.

$$B = 3(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 4[(\cos^2 x)^3 - 2(\sin^2 x)^3] + 6\sin^4 x$$

$$= 3[t^2 + (1 - t)^2][t^2 - (1 - t)^2] + 4[(1 - t)^3 - 2t^3] + 6t^2 = 1.$$

Bài 15

a) Cho $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ và $180^0 < x < 270^0$. Tính sinx, tgx và cotgx.

b) Cho $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính cotgα, sinα và cosα.

Giải

a) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

Vì $180^0 < x < 270^0$ nên $\sin x < 0$. Vậy $\sin x = -\frac{4}{5}$

Ta có : $\quad \text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \quad$ và $\quad \text{cotg}x = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{3}{4}$.

b) $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha} = \frac{16}{25}$

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$. Vậy $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \text{tg}\alpha \,.\, \cos\alpha = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

Bài 16

Tính giá trị sau :

a) $\cos 120^0$ **b)** $\text{tg}300^0$ **c)** $\sin(-780^0)$.

Giải

a) Ta có $120^0 \in (\text{II})$ nên $\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0)$

$$= -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}.$$

b) Ta có $300^0 = 360^0 - 60^0$ nên $\text{tg}300^0 = \text{tg}(-60^0)$

$$= -\text{tg}60^0 = -\sqrt{3}.$$

c) Ta có $\sin(-780^0) = -\sin 780^0 = -\sin(60^0 + 2\,.\,360^0)$

$$= -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 17

Rút gọn : $\quad A = \frac{1}{\text{tg}368^0} + \frac{2\sin 50^0 \cos(-188^0)}{2\cos 638^0 + \cos 98^0}$.

Giải

$$A = \frac{1}{\text{tg}(360^0 + 8^0)} + \frac{2\sin(30^0 + 7\,.\,360^0)\cos(180^0 + 8^0)}{2\cos(720^0 - 82^0) + \cos(90^0 + 8^0)}$$

$$A = \frac{1}{tg8^0} + \frac{2\sin(-\cos 8^0)}{2\cos(-82^0) - \sin 8^0}$$

$$A = \frac{1}{tg8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\cos 82^0 - \sin 8^0} = \frac{1}{tg8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0 - \sin 8^0}$$

$$= \frac{1}{tg8^0} - cotg8^0 = \frac{1 - cotg8^0\, tg8^0}{tg8^0} = 0.$$

Bài 18

Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì :

a) $\sin B = \sin(A + C)$ **b)** $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$

c) $\cos C = -\cos(A + B + 2C)$.

Giải

a) Ta có $A + C + B = \pi$ nên $\sin B = \sin(A + C)$ (góc bù).

b) Ta có $\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ (góc phụ)

c) Ta có $A + B + C = \pi$

$A + B + 2C = \pi + C$

nên $\cos(A + B + 2C) = -\cos C$ (góc hơn kém π).

Bài 19

Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ **b)** $y = tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) y xác định $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow$ $x - 1 \neq 0$

Vậy $D_y = R\setminus\{1\}$.

b) y xác định $\Leftrightarrow$ $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\Leftrightarrow$ $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

Vậy $D_y = \{x \in R \,/\, x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\}$.

Bài 20

Tìm chu kì của : **a)** $y = \cos^2 x$ **b)** $y = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Giải

a) Ta có : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

Vì cos2x có chu kì π nên y có chu kì là π.

b) $y = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Vì chu kì của $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, vậy chu kì của y là π.

Bài 21

Tính $A = \sin 160^0 . \cos 110^0 + \sin 250^0 . \cos 340^0 + \text{tg}110^0 . \text{tg}340^0$.

Giải

$$A = \sin(180^0 - 20^0).\cos(180^0 - 70^0) + \sin(180^0 + 70^0).$$
$$.\cos(360^0 - 20^0) + \text{tg}(90^0 + 20^0)\text{tg}(360^0 - 20^0)$$
$$= \sin 20^0(-\cos 70^0) + (-\sin 70^0)\cos 20^0 + (-\text{cotg}20^0)(-\text{tg}20^0)$$
$$= -(\sin 20^0 . \cos 70^0 + \sin 70^0 . \cos 20^0) + \text{cotg}20^0 . \text{tg}20^0$$
$$= -\sin(70^0 + 20^0) + 1$$
$$= -1 + 1 = 0.$$

Bài 22

Tính $B = \text{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

Giải

$$B = \text{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\alpha - 1}{1 + \text{tg}\alpha}$$

Ta có : $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{9}{41}\right)^2} - 1 = \frac{(41)^2 - 81}{81} = \left(\frac{40}{9}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad tg\alpha = \pm\frac{40}{9}$$

Do $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \dfrac{40}{9}$.

Vậy : $B = \dfrac{\dfrac{40}{9} - 1}{1 + \dfrac{40}{9}} = \dfrac{31}{49}$.

Bài 223

Chứng minh đẳng thức :

$$tga + tgb + tgc - tga\,.\,tgb\,.\,tgc = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c}$$

Giải

$$\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c} = \frac{\sin[a+(b+c)]}{\cos a\cos b\cos c} =$$

$$= \frac{\sin a\cos(b+c) + \sin(b+c)\cos a}{\cos a\cos b\cos c} =$$

$$= \frac{\sin a(\cos b\cos c - \sin b\sin c) + (\sin b\cos c + \sin c\cos b)\cos a}{\cos a\cos b\cos c}$$

$$= \frac{\sin a\cos b\cos c + \sin b\cos c\cos a + \sin c\cos b\cos a}{\cos a\cos b\cos c} - \frac{\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c}$$

$$= tga + tgb + tgc - tga\,.\,tgb\,.\,tgc$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 224

Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{tg^2 2a - tg^2 a}{1 - tg^2 2a\,.\,tg^2 a} = tga\,.\,tg3a$.

Giải

$$\frac{tg^2 2a - tg^2 a}{1 - tg^2 2a\,.\,tg^2 a} = \frac{(tg2a - tga)(tg2a + tga)}{(1 + tg2atga)(1 - tg2atga)}$$

$$= \frac{tg2a - tga}{1 + tg2atga}\cdot\frac{tg2a + tga}{1 - tg2atga} = tg(2a - a)tg(2a + a) = tga\,.\,tg3a.$$

Bài 25

Chứng minh đẳng thức : $\quad tg^2a - tg^2b = \dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}$.

Giải

$$tg^2a - tg^2b = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a}{\cos^2 a.\cos^2 b}$$

$$tg^2a - tg^2b = \frac{(\sin a\cos b + \sin b\cos a)(\sin a\cos b - \sin b\cos a)}{\cos^2 a.\cos^2 b}$$

$$= \frac{\sin(a+b).\sin(a-b)}{\cos^2 a.\cos^2 b}.$$

Bài 26

Chứng minh rằng : $\quad \sin75^0 + \sin15^0 > 1$.

Giải

$\sin75^0 + \sin15^0 > 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin(30^0 + 45^0) + \sin(45^0 - 30^0) > 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin30^0.\cos45^0 + \sin45^0.\cos30^0 + \sin45^0.\cos30^0 - \sin30^0.\cos45^0 > 1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1$

$\Leftrightarrow \quad 2.\dfrac{\sqrt{6}}{4} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{6}}{2} > 1$, đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 27

Tính $\quad A = \cos2a \quad$ biết $\quad \sin\dfrac{a}{2} + \cos\dfrac{a}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Giải

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sin a = -\frac{3}{4}$$

$$A = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Bài 28

Tính $B = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ theo cos2x.

Giải

Ta có : $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ và $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Do đó : $$B = \frac{1 + \dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{3 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Bài 29

Đơn giản biểu thức $C = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\,tg^2\dfrac{x}{2} - \cos^2 x.$

Giải

$$C = \frac{tg^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \cos^2 x = \frac{tg^2\dfrac{x}{2}}{tg^2\dfrac{x}{2}} - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

Bài 30

Chứng minh đẳng thức : $4\cos^4 x - 2\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos 4x = \dfrac{3}{2}.$

Giải

Ta có : $4\cos^4 x - 2\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos 4x - \dfrac{1}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad 4(\cos^2 x)^2 - 2\cos 2x - \dfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) = 1$

$\Leftrightarrow \quad 4\left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 - 2\cos 2x - \dfrac{1}{2}.\,2\cos^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x - 2\cos 2x - \cos^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 = 1.$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM

1. Cho góc x thỏa mãn $0 < x < 90^0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\sin x > 0$　　B. $\cos x < 0$　　C. $\operatorname{tg} x > 0$　　D. $\operatorname{cotg} x > 0$.

2. Cho góc x thỏa mãn $90^0 < x < 180^0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $\cos x < 0$　　B. $\sin x < 0$　　C. $\operatorname{tg} x > 0$　　D. $\operatorname{cotg} x > 0$.

3. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $\sin 90^0 > \sin 180^0$　　B. $\sin 90^0 13' > \sin 90^0 14'$

C. $\sin 45^0 > \sin 46^0$　　D. $\sin 110^0 > \sin 112^0$.

4. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. $\cos 142^0 > \cos 143^0$　　B. $\cos 90^0 15' > \cos 90^0 25'$

C. $\operatorname{tg} 45^0 > \operatorname{tg} 46^0$　　D. $\operatorname{cotg} 128^0 > \operatorname{cotg} 126^0$.

5. Tính giá trị biểu thức sau :

$$m\sin 0^0 + n\cos 0^0 + p\sin 90^0$$

A. $n - p$　　B. $m + p$　　C. $m - p$　　D. $n + p$

6. Tính giá trị biểu thức sau :

$$m\cos 90^0 + n\sin 90^0 + p\sin 180^0$$

A. m　　B. n　　C. p　　D. $m + n$.

7. Biểu thức sau đây rút gọn bằng bao nhiêu :

$$S = a^2\sin 90^0 + b^2\cos 90^0 + c^2\cos 180^0$$

A. $a^2 + b^2$　　B. $a^2 - b^2$　　C. $a^2 - c^2$　　D. $b^2 + c^2$.

8. Tính giá trị biểu thức sau :

$$S = 3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\operatorname{tg}^2 45^0$$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 3.

9. Để tính $\cos 120^0$, một học sinh làm như sau :

(I)　$\sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(II)　$\cos^2 120^0 = 1 - \sin^2 120^0$

(III) $\cos^2 120^0 = \frac{1}{4}$

(IV) $\cos 120^0 = \frac{1}{2}$

Lập luận trên sai từ bước nào ?

A. (I) B. (II) C. (III) D. (IV).

10. Cho biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$, biết $\cos x = \frac{1}{2}$, P bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 7 D. $\frac{13}{4}$.

11. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai :

A. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

B. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

C. $(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

D. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x$.

12. Tính biểu thức sau :

$$S = \cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$$

A. S = 0 B. S = 1 C. S = 2 D. S = 4.

13. Tính biểu thức sau :

$$S = \sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$$

A. S = 1 B. S = 0 C. S = 2 D. S = 4.

14. Rút gọn biểu thức sau :

$$S = \cos(90^0 - x)\sin(180^0 - x) - \sin(90^0 - x)\cos(180^0 - x)$$

A. S = 1 B. S = 0

C. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$ D. $S = 2\sin x \cos x$.

ĐÁP ÁN

PHẦN I - HÌNH HỌC

Chương I : VECTƠ

§1. KHÁI NIỆM VECTƠ

1. C. $\vec{a}$, $\vec{b}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng.

2. A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

3. D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

4. C. AD và BC có cùng trung điểm

5. B. 6

6. A. 1

7. D. Vô số.

§2. PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ VECTƠ

1. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

2. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

3. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

4. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

5. A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

6. A. 100N

7. D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

§3. NHÂN MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$

2. B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$

3. A. 2

4. D. Vô số

5. D. x = 3

6. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

§4. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. C. $\overrightarrow{GA} . \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$

2. A. a^2

3. B. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng
4. C. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ngược hướng
5. A. a^2
6. B. $3a^2$
7. D. $-3a^2$
8. A. 90^0
9. B. 10
10. C. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Chương II :

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. C. 7
2. A. 60^0
3. D. $b = R\sin A$
4. D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
5. C. $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2) - c^2}$
6. C. $S = \frac{abc}{4R}$
7. B. 120^0
8. A. $\sqrt{9}$
9. B. $\sin B + \sin C = 2\sin A$
10. A. 84
11. B. 8
12. C. 32,5
13. A. $\frac{13}{4}$
14. D. IV
15. A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

§2. GIẢI TAM GIÁC

1. B. 12,9
2. D. 19,9
3. B. 37
4. D. 39
5. B. $117^0 49'$
6. C. $59^0 29'$
7. A. 12m
8. A. 120m
9. D. 168m
10. B. 255t
11. B. 91m
12. A. 68.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1. B. a^2

2. A.. a^2

3. C. $-\frac{a^2}{2}$

4. D. $\mathscr{P}_{O/(A,a)} = \frac{a^2}{2}$

5. C. $\mathscr{P}_{O/(A,a\sqrt{2})} = 0$

6. A. $-\frac{a^2}{6}$

7. B. $\frac{a^2}{2}$

8. D. Trung trực của AB

9. A. AC

10. D. Đường tròn (IBA') đi qua B'

11. C. $\widehat{CAx} = \widehat{ACO}$

12. A. $\overline{MI}.\overline{QI} = \overline{NI}.\overline{PI}$

13. B. $IC.ID = R^2 - OM^2$

14. D. Đường thẳng AB cắt (O)

15. B. AB đi qua trung điểm của PQ

16. C. Tập hợp rỗng.

Chương III : PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

§1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

1. D. $|\vec{b}| = \sqrt{2}$

2. B. $\vec{u} = (9; -11)$

3. A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$

4. B. (5; 3)

5. B. $4 + 4\sqrt{2}$

6. A. I(3; 4)

7. C. D(4; 4)

8. D. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9. C. Tam giác ABC vuông cân

10. D. AD // BC

11. C. Chỉ (II) và (III) đúng

12. A. $\left(\frac{25}{6}; \frac{19}{6}\right)$.

§2. ĐƯỜNG THẲNG

1. A. $2x + 3y - 8 = 0$

2. B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$

3. C. $3x - 4y - 12 = 0$

4. D. $2x - y + 2 = 0$

5. A. $2x + y - 1 = 0$

6. B. $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-2}$

7. C. $2x + y - 4 = 0$

8. A. $2x - 3y + 7 = 0$

9. C. d có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$

10. A. $x + 4y - 10 = 0$

11. C. $H(2; 2)$

12. D. $M'(2; -2)$

13. A. $3x + 6y - 5 = 0$

14. B. $\frac{44}{13}$

15. D. 3

16. B. $m = -1$

17. C. 45^0

18. D. $1^0 13' 8''$

19. A. $x + y - 1 = 0$

20. B. 6.

§3. ĐƯỜNG TRÒN

1. D. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

2. A. (C) có tâm $I(1, 2)$

3. A. $x + y - 7 = 0$

4. C. (Δ) tiếp xúc (C)

5. B. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$

6. C. $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$

7. D. (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2)

8. A. $(3, 1)$

9. C. $m < 1$ hay $m > 2$

10. B. $m = \frac{15}{8}$

11. B. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$

12. D. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

§4. BA ĐƯỜNG CONIC

1. D. IV và I

2. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

3. D. (IV)

4. B. $\frac{2b^2}{a}$

5. B. 10

6. D. (H) có tiệm cận là hai đường $y = \pm\frac{4}{3}x$

7. C. Hai tiệm cận của (H) vuông góc

8. A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$

9. B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

10. C. 60^0

11. C. $y^2 = 8x$

12. A. $y^2 = -16x$

13. C. (P) có tham số tiêu là 36

14. D. (P) có tham số tiêu là 2A

15. D. Tâm sai.

PHẦN II - ĐẠI SỐ

Chương I : TẬP HỢP - MỆNH ĐỀ

§1. MỆNH ĐỀ

1. D. Việt Nam là một nước thuộc Châu Á
2. A. Ăn phở rất ngon
3. C. Dơi không phải là một loài chim
4. B. Tổng của hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba
5. C. Nếu B thì A
6. B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3
7. C. ABCD là hình bình hành $\Rightarrow$ AB // CD
8. D. A là điều kiện cần để có B
9. C. ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ $AC = BD$
10. D. $4 + x = 3$
11. A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$
12. C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9
13. A. 48
14. B. 1
15. D. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$
16. D. Có ít nhất một động vật không di chuyển
17. A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
18. C. $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$
19. C. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau
20. A. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3
21. B. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 > n$.

§2. TẬP HỢP

1. B. $3 \in N$

2. C. $\sqrt{2} \notin Q$

3. D. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$

4. C. $X = \varnothing$

5. B. $\{x : x \in A\}$

6. A. $A \subset A$

7. D. $\{n : n \in X$ và $n \notin Y\}$

8. C. II, III đúng

9. D. Cả ba I, II, III đều đúng

10. A. $\varnothing$

11. B. $\{x\}$

12. D. 8

13. C. I và IV

14. D. $V \supset N$

15. C. $\{x \in Q \,/\, x^2 - 4x + 2 = 0\}$

16. B. 15.

§3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

1. B. $\{2, 4\}$

2. C. $\varnothing$

3. A. $\{1, 2, 3\}$

4. B. $A \cap \varnothing = A$

5. B. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

6. A. $A \cup \varnothing = \varnothing$

7. C. $\{6, 9\}$

8. D. $A \setminus A = \varnothing$

9. A.. $G = E \cap F$

10. B. $H = E \cup F$

11. D. $K = E \setminus F$

12. C. $[-3, 4]$

13. B. $[0, 1)$

14. A. $(-2, 1)$

15. D. $E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$

16. B. Đức.

Chương II : HÀM SỐ

1. C. $[1, 3) \cup (3, +\infty)$

2. A. R

3. B. $x = 3$ hay $x = 0$

4. C. R

5. D. $M_1(1; 0)$

6. A. $y = f(x)$ là hàm số chẵn

7. C. y là hàm số không có tính chẵn lẻ

8. C. $y = |x^2 - 1| + |x - 1|$

9. A. $y = x^3 + 1$

10. A. $y = x$

11. C. $y = \frac{1}{x}$

12. D. y là hàm số không có tính chẵn lẻ

13. B. $y = x - 1$

14. B. $y = |x - 1|$

15. C. $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$

16. D. R

17. D. y tăng trên $(2; +\infty)$

18. C. y giảm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chương III :

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1. PHƯƠNG TRÌNH

1. C. $x^2 + 2 = \sqrt{x + 4}$

2. A. $\frac{3x}{x - 2} + x = 0$

3. D. $x^2 - 2x + 1 = 0$

4. D. (IV)

5. D. Các phát biểu A, B, C, đều có thể sai

6. B. $x^4 + x + 2 = 0$

7. B. 1

8. D. Vô số.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. B. $m = -3$

2. A. $m = -2$

3. D. $m \neq \frac{3}{2}$ và $m \neq -\frac{1}{2}$

4. A. $\varnothing$

5. C. $a \neq 0$ hay $b \neq 0$

6. A. $c = 0$

7. C. $a = 0$ và $c \neq 0$

8. B. $b = 0$ và $c \neq 0$

9. B. $(-\infty, 2]$

10. A. 0

11. B. 1

12. D. Vô số.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. A. $\left(\frac{17}{23}; \frac{7}{23}\right)$

2. D. 0

3. D. Vô số

4. A. Một đường thẳng

5. B. 22 gà 14 chó

6. B. $m \neq 3$ và $m \neq -3$

7. C. $\left(\frac{4}{19}; \frac{11}{19}\right)$

8. A. $-\frac{7}{2}$

9. B. 81

10. B. $m = -1$

11. A. 0

12. C. $(0,7 ; -0,6)$.

Chương IV :

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. B. –20

2. C. $m = \frac{6}{7}$

3. A. $m < 0$

4. B. $m < 0$

5. D. $m = \frac{4}{3}$; $x_2 = 1$

6. C. 2

7. A. 0

8. D. 4

9. B. 1

10. B. 1.

§2. TAM THỨC BẬC HAI

1. A. $[2, 3]$

2. D. $[6, +\infty)$

3. B. $\frac{8}{3} < m < 5$

4. C. $-1 < m < 0$

5. A. $-5 < m < -1$

6. B. $m > 4$

7. A. $m < -1$

8. C. $-8 < m < 0$

9. B. $x^2 - 2x + 10$

10. D. $m(x^2 - 9) + x(x - 5) = 0$.

Chương V : BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1 + 2. BẤT ĐẲNG THỨC

1. D. Cả A, B, C đều sai

2. C. $a^2 > 0, \forall a$

3. D. Cả I, II, III đều đúng

4. A. $x < y < z$

5. C. $a = b$ **6.** A. $x > y$

7. B. 1 **8.** B. $a + b > 4$

9. D. Có ít nhất một trong ba đẳng thức trên sai

10. B. Chỉ I và III đúng

11. D. Có ít nhất một trong ba mệnh đề trên sai

12. C. $1 < P < 2$ **13.** B. $1 < A < 2$

14. C. $2 < A < 3$ **15.** B. $1 < P < 2$.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. B. Sai **2.** B. Sai

3. B. $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{3}$ **4.** C. (II) và (III)

5. A. Chỉ (II) **6.** B. $m = 2$

7. B. Chỉ (III) **8.** B. $-1 \le m \le 0$

9. A. $m = 1$ **10.** D. (I), (II) và (III)

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. A. $m < -5$ hay $m > -1$ **2.** B. $-1 < m < \frac{11}{4}$

3. D. $m = 6$ **4.** A. $m \in (-14, 2)$

5. C. $m \in [-5, -1]$ **6.** D. Cả (I) ; (II) và (III)

7. B. $f(x) > 0$ khi ($x < -7$ hay $-1 < x < 1$ hay $x > 3$)

8. C. $-\frac{4}{3} \le x \le -1$ hay $1 \le x < 3$

9. A. $-1 \le x < 1$ hay $\frac{3}{2} < x \le \frac{5}{2}$ **10.** C. $m = 0$ hay $m = 7$

11. D. $1 < m < -\frac{2}{3}$ **12.** A. $-\frac{5}{3} \le m < 1$

13. A. $2 < m < -1$ **14.** D. $-\frac{7}{2} < m < -3$

15. B. $\left(-\frac{25}{8} < m < 0 \text{ hay } m > 3\right)$ và $m \ne 4$ **16.** B. $a \ge -\frac{3}{8}$.

Chương VI : THỐNG KÊ

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. D. Ra quyết định dựa trên số liệu

2. C. Số học sinh trong một lớp là kích thước của mẫu

3. B. 20

4. B. Số con ở mỗi gia đình

5. D. 5

6. A. 30

7. A. 12

8. B. 160

9. C. 40

10. C. 3

11. B. 7

12. A. 2.

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

1. C. 18%

2. A. 10

3. B. 168

4. A. 10

5. C. 13,9%

6. A. 5

7. C. 25

8. B. 12%

9. A. Biểu đồ hình quạt

10. D. Biểu đồ hình quạt

11. A. Dầu hỏa

12. D. 400

13. D. Số 50 không phụ thuộc lớp [54 ; 56)

14. A. Tần suất của số 4 là 20%

15. C. Tần suất của lớp [58 ; 62) là 50%.

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. C. 13

2. C. 18

3. B. 8

4. A. 5

5. A. 2,8

6. C. 47,1%

7. D. 22,1

8. C. 1,54

9. C. 1,24

10. A. 5,6%

11. B. 15,23

12. C. 15,50

13. C. 16

14. A. 15,67

15. D. 17 **16.** A. 121,98

17. D. Khối lương trong bình của em thứ năm và thứ sáu

18. C. Căn số học bậc hai của phương sai.

Chương VII :

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. B. $\cos x < 0$ **2.** A. $\cos x < 0$

3. C. $\sin 45^0 > \sin 46^0$ **4.** A. $\cos 142^0 > \cos 143^0$

5. D. $n + p$ **6.** B. n

7. C. $a^2 - c^2$ **8.** B. $\frac{1}{2}$

9. D. (IV) **10.** D. $\frac{13}{4}$

11. D. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x$

12. C. $S = 2$ **13.** C. $S = 2$

14. A. $S = 1$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

PHẦN I - HÌNH HỌC

Chương I : VECTƠ

A. LÍ THUYẾT 5
§1. Khái niệm vectơ 5
§2. Phép cộng, phép trừ vectơ 7
§3. Phép nhân một số với vectơ 8
§4. Tích vô hướng 10
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 15
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 22

Chương II :

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

A. LÍ THUYẾT 27
§1. Hệ thức lượng trong tam giác 27
§2. Giải tam giác 30
§3. Hệ thức lượng trong đường tròn 31
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 34
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 63

Chương III : PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

A. LÍ THUYẾT 70
§1. Hệ trục tọa độ 70
§2. Đường thẳng 72
§3. Đường tròn 77
§4. Ba đường Conic 79
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 85
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 102

PHẦN II – ĐẠI SỐ

Chương I : TẬP HỢP – MỆNH ĐỀ

A. LÍ THUYẾT 113
§1. Mệnh đề 113
§2. Tập hợp 117
§3. Các phép toán về tập hợp 119
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 120
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 126

Chương II : HÀM SỐ

A. LÍ THUYẾT 134
§1. Khái niệm hàm số 134
§2. Hàm số y = ax + b 136
§3. Hàm số bậc hai 137
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 139
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 142

Chương III : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. LÍ THUYẾT 146
§1. Phương trình 146
§2. Phương trình bậc nhất 146
§3. Hệ phương trình bậc nhất 150
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 153
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 192

Chương IV : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. LÍ THUYẾT 198
§1. Phương trình bậc hai 198
§2. Tam thức bậc hai 200
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 202
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 216

Chương V : BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. LÍ THUYẾT 219
§1. Bất đẳng thức 219
§2. Bất đẳng thức Côsi 221
§3. Bất phương trình bậc nhất 221
§4. Bất phương trình bậc hai 223
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 224
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 245

Chương VI : THỐNG KÊ

A. LÍ THUYẾT 254
§1. Các khái niệm cơ bản 254
§2. Trình bày một mẫu số liệu 254
§3. Các số đặc trưng của một mẫu số liệu 260
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 263
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 281

Chương VII : GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. LÍ THUYẾT 289
§1. Góc và cung lượng giác 289
§2. Các giá trị lượng giác của một góc hay một cung 290
§3. Công thức lượng giác 294
B. BÀI TOÁN CÓ GIẢI 296
C. ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 310
ĐÁP ÁN ĐỀ TOÁN TRẮC NGHIỆM 312

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập: NGUYỄN HƯNG

Trình bày bìa: THÁI VĂN

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TOÁN 10

Mã số: 1L – 15 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 cm tại Xưởng in Chi nhánh Công Ty Phát Triển Công Nghệ và Truyền Hình TP.HCM.
Số xuất bản: 104 – 2005/CXB/17-243/ĐHQGHN, ngày 10/11/2005.
Quyết định xuất bản số: 66 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.